SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Melita Vidov

TEORIJA IGARA I DIZAJN MEHANIZMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Lavoslav Čaklović

Zagreb, rujan, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Za mog brata, da mu bude motivacija

Sadržaj

Uvod

Za mogućnost pisanja ovog rada možemo se zahvaliti trojici nobelovaca čija su znamenita imena Leonid Hurwicz, Eric Maskin i Roger Myerson. Naime, ovaj trojac koji je 2007. godine dobio Nobrelovu nagradu za radove i doprinos na području teorije dizajna mehanizma, polazi od promatranja ekonomske stvarnosti koja je daleko od ideala Smithove nevidljive ruke jer konkurencija na tržištu nije sasvim slobodna, potrošači nemaju savršene i potpune informacije i mnoge transakcije ostaju skrivene. Njihova teorija teži ka stvaranju mehanizma koji će prepoznati zašto tržište u nekim situacijama funkcionira, a u nekim ne, te pomoći odrediti efikasne trgovinske mehanizme, koncept regulacije i glasačke postupke. Mehanizmi se koriste i prakticiraju od davnina, a popularni primjer mehanizma su aukcije.

Zamislimo situaciju gdje želimo prodati kuću ili auto i prepoznali smo potencijalne kupce koji su voljni platiti traženu cijenu. Vjerojatno bi tada poželjeli provesti aukciju između tih kupaca sa ciljem postizanja što veće cijene. Postoje različiti oblici aukcije koje bi mogli primijeniti. No, nameće se pitanje kako i koji oblik aukcije izabrati. Odabirom procedure aukcije, stvara se strateška igra između kupaca. Rezultat aukcije neće ovisiti samo o njima i njihovom odabiru, nego će ovisiti i o odabirima drugih kupaca. Stoga će njihova optimalna strategija također ovisiti o strategijama ostalih kupaca. Iz navedenoga se može zaključiti da se teorija dizajna mehanizma nadograđuje na teoriju igara. Teorija igara uzima pravila igre takva kakva jesu i na temelju istih anticipira ponašanja strateških igrača, dok se teorija dizajna mehanizma bavi odabirom optimalnog pravila za igru. Dizajn mehanizma treba dizajnera kako bi postavio pravila i riješio problem optimizacije sa nepotpunim informacijama. Dakle osnovna ideja dizajna mehanizma je određivanje pravila igre u svrhu postizanja rezultata, unutar zadane strukture u kojoj se svaki igrač ponaša kako dizajner želi. Dizajneri teže postići ciljeve kao što su istinitost, individualna racionalnost, ujednačenost proračuna i socijalana dobrobit što ćemo i pokazati u ovom radu.

Poglavlje 1

Jedan prodavač, jedan kupac

U ovom poglavlju promatrati ćemo mehanizme u kojima sudjeluju jedan prodavač i jedan kupac.

1.1 Davanje cijene nerazdvojivom dobru

Pretpostavimo da prodavač želi prodati jedno nerazdvojivo dobro i pritom ne daje nikoju vrijednost tom dobru. Njegov cilj je maksimizirati očekivani povrat od prodaje tog dobra. Stoga je neutralan na rizik.

Pretpostavljamo da postoji samo jedan potencijalni kupac. Za kupca koji kupi dobro i pritom plati novčani transfer t definiramo korisnost kupca kao $\theta - t$. Broj $\theta > 0$ predstavlja kupčevu subjektivnu procjenu vrijednosti dobra.
Općenito, korisnost možemo zapisati kao

$$u(I, t).$$

gdje je

$$I := \begin{cases} 1, & \text{ako kupac kupi dobro,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako kupac ne kupi dobro, njegova korisnost iznosi nula.
Za korisnost u koja se može zapisati kao zbroj θ i $-t$ se obično kaže da je *aditivno separabilna*. Pretpostavka o aditivnoj separabilnosti funkcije korisnosti nam govori da kupčeva procjena dobra ne ovisi o iznosu novca kojeg za to plaća.

Pretpostavljamo da je kupac neutralan na rizik pa je stoga njegova korisnost linearna u novcu. Sada uvodimo važnu pretpostavku o informacijama. Pretpostavljamo da je vrijednost θ poznata kupcu, ali ne i prodavaču. Ova pretpostavka je opravdana u mnogim situacijama jer kupci često bolje od prodavača znaju koliko određeno dobro odgovara njihovim preferencijama. Vrijednost θ naziva se i *kupčev tip.*

Prodavač želi procijeniti koju je vrijednost kupac dodijelio dobru. Prodavač zna da se kupčeva procjena θ nalazi između neke donje i gornje vrijednosti, tj. $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, $0 \leq \underline{\theta} < \overline{\theta}$. Pretpostavljamo da prodavač ima subjektivnu vjerojatnosnu distribuciju po svim mogućim vrijednostima θ. Stoga, neka je θ slučajna varijabla i neka je $F : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to [0, 1]$ funkcija distribucije s pripadnom funkcijom gustoće f. Također, pretpostavljamo da je $f(\theta) > 0$ za svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

Želimo odabrati način na koji će prodavač prodati svoje dobro da bi maksimizirao svoj očekivani profit. Pretpostavimo da prodavač postavi cijenu p i kaže kupcu da će dobiti dobro ako i samo ako je spreman platiti iznos p. Zanima nas kako će prodavač odabrati p. Vjerojatnost da je kupčeva procjena ispod p je dana s vrijednošću funkcije distribucije $F(p)$, a vjerojatnost da je kupčeva procjena iznad p, odnosno da kupac prihvaća danu cijenu, iznosi $1 - F(p)$. Tada je očekivani povrat za prodavača $p \cdot (1 - F(p))$. Optimalna strategija za prodavača je izabrati neku cijenu kako bi maksimizirao $p \cdot (1 - F(p))$.

Pitamo se je li ovo najbolja strategija za prodavača, tj. što je još mogao učiniti? Da bi odgovorili na ovo pitanje prvo moramo precizirati postupke na koje se prodavač može obvezati. Pretpostavljamo da se prodavač obvezuje na ekstenzivnu formu igre gdje su igrači prodavač i kupac, a potezi su povezani s vjerojatnosnom distribucijom na $\{0, 1\} \times \mathbb{R}$. Ovakva vjerojatnosna distribucija opisuje vjerojatnost s kojom će se dobro prodati kupcu zajedno s vjerojatnosnom distribucijom po novčanim transferima kupca.

Prodavačeva prednost je u tome što bira strategiju koja je za njega najpovoljnija. Kad se prodavač obveže na igru i odabere strategiju, predstavlja ju kupcu te zatim kupac bira svoju strategiju u danoj igri. Pretpostavljamo da kupac bira svoju vlastitu strategiju znajući vrijednost θ kako bi maksimizirao svoju očekivanu korisnost. Za svaki tip θ kupac će kada bira svoju strategiju za maksimiziranje očekivane korisnosti zahtijevati da njegova očekivana korisnost bude barem nula što je jednako korisnosti koju ima kada ne kupi dobro i ne plati ništa. Ovakvo ograničenje ćemo zvati *ograničenjem individualne racionalnosti.*

Naš predmet opažanja je problem optimizacije u kojem su prodavačeve varijable izbora ekstenzivna igra i strategija u toj igri za koju je prodavačeva objektivna funkcija očekivani povrat i za koju je ograničenje na prodavačev izbor ograničenje individualne racionalnosti. Vidimo da je skup prodavačevog izbora jako velik i da postoji puno igara i strategija koje može odabrati. Stoga ćemo se ograničiti na manji skup mehanizama koje opisujemo u sljedećoj definiciji.

Definicija 1.1.1. *Direktni mehanizam sastoji se od funkcija q i t takvih da*

$$q : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to [0, 1]$$

i

$$t : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}.$$

U direktnom mehanizmu kupac prijavljuje svoj tip θ. Prodavač se obvezuje prodati dobro kupcu s vjerojatnošću $q(\theta)$ ako je kupac prijavio da je njegov tip θ, a kupac mora platiti prodavaču iznos $t(\theta)$ ako je kupac prijavio da je njegov tip θ. $t(\theta)$ možemo interpretirati kao kupčevu očekivanu isplatu uvjetovanu s θ.

Sve prodavačke mehanizme koji nisu direktni nazivamo *indirektnim mehanizmima.*

Kupčeva strategija σ u direktnom mehanizmu je preslikavanje $\sigma : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \rightarrow [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ koje kupčevoj istinitoj procjeni θ pridružuje procjenu $\sigma(\theta)$ koju kupac prijavljuje.

Direktan mehanizam se temelji na tome da kupac govori istinu. Da bi se ogradili od mogućih lažnih prijava, uvodimo sljedeću propoziciju:

Propozicija 1.1.2. ***(Princip otkrivenja)***[1]

Za svaki mehanizam Γ *i svaku optimalnu kupčevu strategiju* σ *u* Γ *postoji direktni mehanizam* Γ' *i optimalna kupčeva strategija* σ' *u* Γ *takvi da:*

(i) $\sigma'(\theta) = \theta$*, za svaki* $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$*, tj.* σ' *osigurava istiniti tip;*

(ii) Za svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ *vjerojatnost* $q(\theta)$ *i isplata* $t(\theta)$ *jednaki su vjerojatnosti kupnje i očekivanoj isplati iz* Γ *ako kupac igra strategiju* σ

Dokaz. Za svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ definiramo $q(\theta)$ i $t(\theta)$ kao u (*ii*). Pokazati ćemo da je da je za ovaj direktni mehanizam strategija $\sigma'(\theta) = \theta$, koja osigurava istiniti tip, optimalna za kupca. S obzirom da su q i t jednako definirane u oba mehanizma onda su i korisnosti jednake u oba mehanizma pod istom strategijom σ.

Promotrimo slučaj kada se poprima neka druga vrijednost $\theta' \neq \theta$. Tada kupac ima istu očekivanu korisnost kao da igra strategiju $\sigma(\theta')$ u Γ. Optimalnost istinitog prijavljivanja θ u Γ' tada direktno slijedi iz optimalnosti od $\sigma(\theta)$ u Γ. □

Princip otkrivenja nam sada dopušta da bez smanjenja općenitosti možemo tražiti optimalni mehanizam samo među direktnim mehanizmima koji su par funkcija q i t, gdje je za kupca uvijek optimalno prijaviti istiniti tip.
Za dani mehanizam definiramo kupčevu očekivanu korisnost $u(\theta)$ uz dani θ kao:

$$u(\theta) = \theta q(\theta) - t(\theta).$$

Uz ovu notaciju sada možemo formalno definirati uvjet uz koji će kupcu govorenje istine uvijek biti optimalno.

Definicija 1.1.3. *Direktni mehanizam je poticajno kompatibilan*[2] *ako je govorenje istine optimalno za svaki tip tj.* $u(\theta) \geqslant \theta q(\theta') - t(\theta')$*, za svaki* $\theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

[1] eng. Revelation Principle
[2] eng. Incentive compatible

Ranije smo spomenuli da ima smisla zahtijevati da kupčeva očekivana korisnost nije manja od neke donje granice, na primjer nula. Ovaj zahtjev sadržan je u sljedećoj definiciji.

Definicija 1.1.4. *Direktni mehanizam je individualno racionalan*[3] *ako je kupac, uvjetovan svojim tipom, dobrovoljno spreman sudjelovati, tj.* $u(\theta) \geqslant 0$ *za svaki* $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

Promotrimo sada uvjete pod kojima je direktni mehanizam poticajno kompatibilan.

Lema 1.1.5. *Ako je direktni mehanizam poticajno kompatibilan onda je* q *rastuća funkcija u* θ.

Dokaz. Neka su θ i θ' tipovi takvi da je $\theta > \theta'$. Želimo pokazati da je tada $q(\theta) \geq q(\theta')$. Po definiciji poticajne kompatibilnosti tada slijedi:

$$\theta q(\theta) - t(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta')$$
$$\theta' q(\theta) - t(\theta) \leq \theta' q(\theta') - t(\theta')$$

Oduzimanjem ovih dviju nejednakosti dobivamo:

$$(\theta - \theta')q(\theta) \geq (\theta - \theta')q(\theta') \Leftrightarrow q(\theta) \geq q(\theta').$$

□

Pokažimo da je i funkcija u rastuća funkcija.

Lema 1.1.6. *Ako je direktni mehanizam poticajno kompatibilan onda je* u *rastuća funkcija. Također,* u *je konveksna i diferencijabilna osim u prebrojivo mnogo točaka. Za svaki* θ *za koji je diferencijabilna vrijedi:*

$$u'(\theta) \geqslant q(\theta).$$

Dokaz. Za svaki θ je:

$$u(\theta) = max_{\theta' \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]}(\theta q(\theta') - t(\theta')).$$

Dakle, u je maksimum rastuće i afine, stoga konveksne funkcije. Maksimum rastućih funkcija je rastući i maksimum konveksnih funkcija je konveksni. Stoga, u je rastuća i konveksna. Konveksne funkcije su diferencijabilne osim u prebrojivo mnogo točaka. Promotrimo bilo koji θ za koji je u diferencijabilna. Neka je $\delta > 0$. Tada je

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \to 0} \frac{u(\theta + \delta) - u(\theta)}{\delta} &\geq lim_{\delta \to 0} \frac{((\theta + \delta)q(\theta) - t(\theta)) - (\theta q(\theta) - t(\theta))}{\delta} \\
&= q(\theta). \\
\lim_{\delta \to 0} \frac{u(\theta) - u(\theta - \delta)}{\delta} &\leq lim_{\delta \to 0} \frac{(\theta q(\theta) - t(\theta)) - ((\theta - \delta)q(\theta) - t(\theta))}{\delta} \\
&= q(\theta).
\end{aligned}$$

Združimo li ove nejednakosti, dobivamo $u'(\theta) = q(\theta)$ kad god je u diferencijabilna. □

[3]eng. Individually rational

Sljedeća lema je zapravo primjena Leme 1.1.6 na osnovni teorem integralnog računa.

Lema 1.1.7. ***(Ekvivalentnost isplata)***[4] *Neka je dan poticajno kompatibilan direktni mehanizam. Tada za svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ vrijedi:*

$$u(\theta) = u(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx.$$

Dokaz. Funkcija u je konveksna pa je po Propoziciji 5.16 u [3] stoga i apsolutno neprekidna. Po Propoziciji 5.13 u [3] slijedi da je integral svoje derivacije.

□

Iz Leme 1.1.7 vidimo da očekivane korisnosti za različite kupčeve tipove ovise o funkciji q i očekivanoj korisnosti kupca za najniži tip $u(\underline{\theta})$.

Svaka dva indirektna mehanizma koja daju isti q i $u(\theta)$ za kupca koji optimizira, daju isti očekivani povrat za svaki kupčev tip. Vidimo da smo indirektno pokazali da ekvivalentnost isplata vrijedi i na skupu indirektnih mehanizama

Sada možemo dobiti efektivan način računanja novčanog transfera t kojeg kupac očekuje da će platiti prodavaču:

Lema 1.1.8. ***(Ekvivalentnost prihoda)***[5] *Neka je dan poticajno kompatibilan direktni mehanizam. Tada za svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ vrijedi:*

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) + (\theta q(\theta) - \theta q(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx.$$

Dokaz. Izrazimo $t(\theta)$ iz $u(\theta) = \theta q(\theta) - t(\theta)$.Dobivamo:

$$t(\theta) = \theta q(\theta) - u(\theta) = \theta q(\theta) - u(\underline{\theta}) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx = t(\underline{\theta}) + (\theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx.$$

□

Iz Leme 1.1.8 vidimo da očekivane isplate za različite kupčeve tipove ovise o funkciji q i očekivanoj isplati kupca za najniži tip $t(\underline{\theta})$.

Za dani q i $t(\theta)$ postoji jedan i samo jedan poticajno kompatibilan direktni mehanizam. Svaka dva indirektna mehanizma koja daju isti q i $t(\theta)$ za kupca koji optimizira, daju isti očekivani prihod za svaki tip kupca. Za prodavača to znači da svaka dva takva indirektna mehanizma daju isti očekivani prihod. To je zato što je prodavačev očekivani prihod zapravo očekivana vrijednost kupčevih očekivanih isplata, gdje prodavač uzima očekivane

[4] eng. Payoff equivalence

[5] eng. Revenue equivalence

vrijednosti po svim kupčevim tipovima. Vidimo da smo indirektno pokazali da ekvivalentnost prihoda vrijedi i na skupu indirektnih mehanizama

Lema 1.1.5 i Lema 1.1.8 daju nužne uvjete da bi direktni mehanizam bio poticajno kompatibilan. U sljedećoj propoziciji pokazati ćemo da su to također i dovoljni uvjeti.

Propozicija 1.1.9. *Direktni mehanizam (q, t) je poticajno kompatibilan ako i samo ako:*
(i) q je rastuća
(ii) Za svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ vrijedi $t(\theta) = t(\underline{\theta}) + (\theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$

Dokaz. Za dokaz dovoljnosti moramo pokazati da ako vrijedi (i) i (ii) onda je $u(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta')$, za svaki $\theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

$$
\begin{aligned}
u(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta') &\Leftrightarrow u(\theta) \geq \theta q(\theta') - \theta' q(\theta') + \theta' q(\theta') - t(\theta') \\
&\Leftrightarrow u(\theta) \geq \theta q(\theta') - \theta' q(\theta') + u(\theta') \\
&\Leftrightarrow u(\theta) - u(\theta') \geq (\theta - \theta') q(\theta') \\
&\Leftrightarrow \int_{\theta'}^{\theta} q(x)dx \geq \int_{\theta'}^{\theta} q(\theta')dx
\end{aligned}
$$

Promatramo dva integrala u posljednjoj nejednakosti. Pretpostavimo prvo da je $\theta > \theta'$. Granice integracije za oba integrala su jednake i q raste pa je onda na cijelom području integracije lijeva podintegralna funkcija veća od desne. Stoga vrijedi nejednakost.

Ako je $\theta < \theta'$, obrnemo granice integracije i množimo s -1 pa se okrene znak nejednakosti. Opet, pošto q raste, na tom području integracije će lijeva podintegralna funkcija biti manja od desne. Stoga vrijedi nejednakost. □

Sada smo dobili kompletnu karakterizaciju svih poticajno kompatibilnih direktnih mehanizama. Promotrimo sada one koje su i individualno racionalni.

Propozicija 1.1.10. *Poticajno kompatibilan direktni mehanizam je individualno racionalan ako i samo ako je $u(\underline{\theta}) \geqslant 0$ tj. $t(\underline{\theta}) \leq \underline{\theta} q(\underline{\theta})$.*

Dokaz. Po Lemi 1.1.6 je u rastuća funkcija u θ za poticajno kompatibilan direktni mehanizam. Stoga je $u(\theta)$ ne-negativna za svaki θ ako i samo ako je ne-negativna za najniži tip $\underline{\theta}$. □

Sada smo dobili kompletnu karakterizaciju skupa svih direktnih mehanizama iz kojeg prodavač može birati kako bi maksimizirao svoj očekivani prihod. Pokazati ćemo da je za prodavača uvijek optimalno postaviti isplatu za najmanji tip tako da očekivana korisnost za taj tip bude jednaka nuli.

Lema 1.1.11. *Ako poticajno kompatibilan i individualno racionalan direktni mehanizam maksimizira prodavačev očekivani prihod onda je* $t(\underline{\theta}) = \underline{\theta}q(\underline{\theta})$.

Dokaz. Po Propoziciji 1.1.10 je $t(\underline{\theta}) \leq \underline{\theta}q(\underline{\theta})$. Kada bi vrijedilo $t(\underline{\theta}) < \underline{\theta}q(\underline{\theta})$, prodavač bi mogao povećati očekivani prihod tako da izabere direktni mehanizam s istim q, ali većim $t(\underline{\theta})$. U formuli za isplate u Propoziciji 1.1.9, isplate za sve tipove bi se povećale.

□

Koristeći Lemu 1.1.11 sada možemo još više pojednostaviti prodavačev izbor. Prodavač bira iz skupa svih rastućih funkcija $q : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to [0, 1]$.

Za svaku takvu funkciju, prodavač će postaviti $t(\underline{\theta}) = \underline{\theta}q(\underline{\theta})$ tako da je za najmanji tip očekivana korisnost nula, a sve ostale tipove isplata su dane s:

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) + (\theta q(\theta) - \underline{\theta}q(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx = \theta q(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx. \tag{1.1}$$

Promotrimo malo bolje skup funkcija q iz kojeg prodavač može birati.
Neka je $\mathcal{F}$:= { f | f: $[\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}$, f su ograničene} vektorski prostor na kojem je definirana $\mathcal{L}^\infty$ norma. $\mathcal{L}^\infty$ normu definiramo kao $\|f\|$ =inf $\{M \mid \mu(\{\theta | \mathcal{F}(\theta)| > M\}) = 0\}$ gdje je μ Lebesgue izmjeriva. Označimo s $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ skup svih rastućih funkcija iz $\mathcal{F}$ takvih da je $f(x) \in [0, 1]$. Sada kupac bira iz skupa $\mathcal{M}$. Sada ćemo opisati skup $\mathcal{M}$.

Lema 1.1.12. $\mathcal{M}$ *je kompaktan i konveksan skup.*

Promotrimo sada malo bolje prodavačevu objektivnu funkciju koja je zapravo desna strana od (1.1). Vidimo da je neprekidna i linearna u q. Stoga, prodavač maksimizira neprekidnu linearnu funkciju na kompaktnom i konveksnom skupu pa je dovoljno promatrati samo rubne točke.

Definicija 1.1.13. *Ako je C konveksni podskup vektorskog prostora x, onda je* $x \in C$ *ekstremna točka od C ako za svaki* $y \in X, y \neq 0$ *vrijedi*

$$x + y \in C \text{ ili } x - y \in C \text{ ili oboje}.$$

Sada možemo izreći rezultat koji ćemo koristiti za traženje prodavačevog optimalnog mehanizma.

Propozicija 1.1.14. ***(Teorem o ekstremnim točkama)*** *Neka je X kompaktni konveksni podskup normiranog vektorskog prostora i neka je* $f : X \to \mathbb{R}$ *neprekidna linearna funkcija. Tada je skup E ekstremnih točaka od X neprazan i postoji* $e \in E$ *tako da je* $f(e) \geqslant f(x)$, *za svaki* $x \in X$.

Dakle, funkcija q koja je ekstremna točka skupa $\mathcal{M}$ koja maksimizira očekivani prihod po svim ekstremnim točkama od $\mathcal{M}$ te ujedno maksimizira očekivani povrat po svim funkcijama iz $\mathcal{M}$. Stoga je dovoljno umjesto svih funkcija iz skupa $\mathcal{M}$ promatrati samo skup ekstremnih točaka od $\mathcal{M}$. Sljedeći rezultat opisuje skup ekstremnih točaka $\mathcal{M}$.

Lema 1.1.15. *Funkcija $q \in \mathcal{M}$ je ekstremna točka skupa $\mathcal{M}$ ako i samo ako je $q(\theta) \in \{0, 1\}$ za gotovo svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$*

Dokaz. Promatramo sve funkcije q opisane u lemi i neka je $q' \in \mathcal{F}$ takva da $q'(\theta) \neq 0$ za neke θ.
Ako je $q'(\theta) > 0$ i $q(\theta) = 0$ onda je $q(\theta) - q'(\theta) < 0$ pa $q - q' \notin \mathcal{M}$.
Ako je $q'(\theta) > 0$ i $q(\theta) = 1$ onda je $q(\theta) + q'(\theta) > 0$ pa $q + q' \notin \mathcal{M}$.
Analogno se pokaže slučaj kad je $q'(\theta) < 0$.

Dakle, q je ekstremna točka skupa $\mathcal{M}$.
Promotrimo sada sve funkcije koje nisu opisane u lemi, tj. postoji neki θ^* takav da je $q(\theta^*) \in (0, 1)$. Definiramo:

$$q'(\theta) := \begin{cases} q(\theta), & q(\theta) \leq 0.5, \\ 1 - q(\theta), & q(\theta) > 0.5. \end{cases}$$

Očito je $q' \neq 0$.
Promotrimo sada funkciju

$$(q + q')(\theta) = \begin{cases} 2q(\theta), & q(\theta) \leq 0.5, \\ 1, & q(\theta) > 0.5. \end{cases}$$

Dakle, $q + q' \in \mathcal{M}$.
Analogno se pokaže za $q - q'$.

Zaključujemo da q nije ekstremna točka od $\mathcal{M}$.

□

Prodavač sada može promatrati ne-stohastičke mehanizme. Ne-stohastički mehanizam je monoton ako i samo ako postoji $p^* \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ takav da

$$q(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta > p^*, \\ 0, & \theta < p^*. \end{cases}$$

U ovako definiranom mehanizmu, prodavač može postaviti cijenu p^* koju će kupac prihvatiti ili odbiti.

Analizu zaključujemo sljedećom propozicijom:

Propozicija 1.1.16. *Direktni mehanizam maksimizira prodavačev očekivani profit među svim poticajno kompatibilnim i individualno racionalnim direktnim mehanizmima ako i samo ako postoji* $p^* \in argmax_{p\in[\underline{\theta},\overline{\theta}]} p(1 - F(p))$ *takav da:*

$$q(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta > p^*, \\ 0, & \theta < p^* \end{cases} \; i \; t(\theta) = \begin{cases} p^*, & \theta > p^*, \\ 0, & \theta < p^* \end{cases}.$$

Dokaz. Kao što smo ranije pokazali, trebamo promatrati samo funkcije q takve da kupac dobiva dobro s vjerojatnošću 1 ako je njegova procjena vrijednosti iznad neke cijene p^*, a s vjerojatnošću 0 ako je njegova procjena vrijednosti ispod p^*. Očito je da je tada optimalna funkcija q opisana u propoziciji. Formula za t slijedi iz Propozicije 1.1.9.

□

Pokazali smo da prodavač ne može napraviti ništa bolje od toga da postavi cijenu p^* koju će kupac ili prihvatiti ili odbaciti.

1.2 Nelinearno davanje cijena

Promotrimo sada model u kojem monopolist nudi beskonačno djeljivo dobro (na primjer, šećer) jednom potencijalnom kupcu.

Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da je trošak proizvodnje linearan u novcu tj. za proizvedenu količinu $q \geqslant 0$, trošak proizvodnje je cq, gdje je $c > 0$ konstanta.
Prodavač je neutralan na rizik pa stoga želi maksimizirati svoj očekivani povrat. Kupčeva korisnost ako kupi količinu $q \geqslant 0$ i plati prodavaču novčani transfer t iznosi $\theta v(q) - t$.

Pretpostavljamo da je $v(0) = 0$ i v je dva puta diferencijabilna, strogo rastuća i strogo konkavna funkcija, tj. $v'(q) > 0, v''(q) < 0$, za svaki $q \geqslant 0$. Zbog $v(0) = 0$ je kupčeva korisnost kada ne kupi dobro i ne plati ništa jednaka nuli. Izraz $\theta v(q)$ predstavlja kupčevu volju da plati količinu q.

Kao i u prethodnom poglavlju, pretpostavljamo da je korisnost aditivno separabilna u potrošnji dobra i novcu, te je kupac neutralan na rizik u novcu.

Parametar θ govori koliko kupac vrednuje dobro. Preciznije, povećanjem θ, povećava se i kupčeva apsolutna volja da plati $\theta v(q)$ i kupčeva marginalna volja da plati $\theta v'(q)$ za svaku danu količinu q. Parametar θ prima vrijednosti između $\underline{\theta}$ i $\overline{\theta}$. Vrijednost θ je poznata kupcu, ali ne i prodavaču. Pretpostavimo da prodavač ima subjektivnu vjerojatnosnu distribuciju po svim mogućim vrijednostima θ. Stoga, neka je θ slučajna varijabla i neka je $F : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to [0, 1]$ funkcija distribucije s pripadnom funkcijom gustoće f na intervalu $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$. Također, pretpostavimo da je $f(\theta) > 0$ za svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$. Pretpostavimo još i da je

$$\lim_{q\to +\infty} \overline{\theta} v'(q) < c.$$

To znači da čak i za najveći tip, marginalna volja da plati pada ispod c kako q raste. Ova pretpostavka osigurava da je količina koju prodavač nudi kupcu konačna za sve moguće kupčeve tipove.

Kao i ranije, tražimo optimalnu strategiju za prodavača. Također, vrijedi i princip otkrivenja pa stoga možemo promatranje svesti samo na direktne mehanizme. Uvodimo definiciju direktnog mehanizma.

Definicija 1.2.1. *Direktni mehanizam sastoji se od funkcija q i t takvih da*

$$q : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}_+$$

i

$$t : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}.$$

U direktnom mehanizmu kupac prijavljuje svoj tip θ. Prodavač se obvezuje prodati kupcu količinu $q(\theta)$, a kupac mora platiti prodavaču iznos $t(\theta)$ ako je kupac prijavio da je njegov tip θ. U ovom poglavlju pretpostavljamo da je za svaki tip θ količina koja je prodana kupcu ako prijavi da je njegov tip θ, ne-negativan broj, a ne vjerojatnosna distribucija kao što je ranije bio slučaj.

Kao u prethodnom poglavlju, proučavamo direktne mehanizme koji su poticajno kompatibilni i individualno racionalni. Dokazi se provode analogno kao u prethodnom poglavlju pa ćemo iznijeti samo gotov rezultat.

Propozicija 1.2.2. *Direktni mehanizam (q, t) je poticajno kompatibilan ako i samo ako:*
(i) q je rastuća;
(ii) Za svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ vrijedi:

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) - \underline{\theta} v(q(\underline{\theta})) + \theta v(q(\theta))) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dx. \tag{1.2}$$

Propozicija 1.2.3. *Poticajno kompatibilan direktni mehanizam je individualno racionalan ako i samo ako je $u(\underline{\theta}) \geqslant 0$, tj. $t(\underline{\theta}) \leq \underline{\theta} q(\underline{\theta})$.*

Prodavačev problem se sada svodi na biranje iz skupa svih mehanizama koji zadovoljavaju ova dva uvjeta, kako bi maksimizirao svoj očekivani prihod. Očito je da će prodavač izabrati $t(\underline{\theta})$ tako da je korisnost za tip $\underline{\theta}$ jednaka nuli tj. $t(\underline{\theta}) = \underline{\theta} q(\underline{\theta})$.

Uvrštavanjem $t(\underline{\theta}) = \underline{\theta} q(\underline{\theta})$ u (1.2) dobivamo

$$t(\theta) = \theta v(q(\theta))) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dx.$$

Sada još preostaje naći optimalnu funkciju q.
Vidimo da prodavačeva objektivna funkcija nije linearna po q jer na q djeluje nelinearna funkcija v. Ako prodavač izabere neku funkciju q, onda njegov očekivani profit iznosi:

$$\begin{aligned} &\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [\theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dx - cq(\theta)]f(\theta)d\theta \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \theta v(q(\theta))f(\theta)d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dxf(\theta)d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} cq(\theta)f(\theta)d\theta \end{aligned} \tag{1.3}$$

Želimo još pojednostaviti izraz (1.3). Usredotočimo se na dvostruki integral u (1.3)

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dxf(\theta)d\theta &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))f(\theta)dxd\theta \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{x}^{\overline{\theta}} v(q(x))f(\theta)d\theta dx \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v(q(x)) \int_{x}^{\overline{\theta}} f(\theta)d\theta dx \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v(q(x))(1 - F(x))dx \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v(q(\theta))(1 - F(\theta))d\theta \end{aligned} \tag{1.4}$$

Uvrštavanjem (1.4) u prodavačevu objektivnu funkciju u (1.3) dobivamo:

$$\begin{aligned} (1.3) &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [\theta v(q(\theta)) - cq(\theta]f(\theta)d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v(q(\theta))(1 - F(\theta))d\theta \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [\theta v(q(\theta)) - cq(\theta]f(\theta)d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v(q(\theta))\frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}f(\theta)d\theta \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [v(q(\theta))(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}) - cq(\theta)]f(\theta)d\theta \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dakle, prodavač bira q kako bi maksimizirao očekivanu vrijednost izraza u uglatoj zagradi u (1.5). Kupac mora izabrati rastuću funkciju q.

Zaboravimo na trenutak da q mora biti rastuća. Tada kupac može izabrati $q(\theta)$ za svaki θ posebno kako bi maksimizirao izraz u uglatoj zagradi. Izbor funkcije q također maksimizira očekivanu vrijednost tog izraza. Promatramo ovaj pristup prvo za izbor funkcije q te zatim uvodimo uvjet pod kojim će funkcija q koju nađemo biti rastuća.
Da bi maksimizirali izraz u uglatoj zagradi za dani θ, mora vrijediti

$$\begin{aligned} & v'(q(\theta))(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}) - c = 0 \\ \Leftrightarrow & v'(q(\theta))(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}) = c. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Promotrimo dva slučaja.
1.slučaj: Neka je

$$\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} \leq 0.$$

Tada očito nema rješenja jer je $v' > 0$ i $v(0) = 0$ pa je optimalan izbor $q(\theta) = 0$.

2.slučaj: Neka je sada

$$\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} > 0.$$

Prisjetimo se da smo pretpostavili da je v' diferencijabilna (jer v ima drugu derivaciju) pa je stoga neprekidna, padajuća i $\lim_{q \to +\infty} \overline{\theta} v'(q) < c$. Vidimo da lijeva strana od (1.6) ima ta ista svojstva.
Ako vrijedi

$$v'(0)(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}) \leq c$$

onda je optimalan izbor očito

$$q(\theta) = 0.$$

Ako vrijedi $v'(0)(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}) > c$ onda po pretpostavci postoji jedinstveno rješenje za (1.6) i ta stacionarna točka je također jedinstven optimalan izbor za $q(\theta)$.

Za svaki θ smo odredili izbor funkcije $q(\theta)$ koji maksimizira izraz u uglatim zagradama u (1.5). Prodavač želi maksimizirati očekivanu vrijednost tog izraza i pritom mora izabrati rastuću funkciju q. Ako je funkcija q koju smo gore odredili rastuća, onda ona mora biti optimalan izbor za prodavatelja.
Pretpostavka da

$$\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$$

raste u θ implicira da je lijeva strana od (1.6) rastuća u θ za svaki q. Optimalan q je presjecište točaka lijevog izraza od (1.6) sa c ili 0, štogod je od toga veće. Sada lako vidimo da q raste u θ.
Analizu završavamo propozicijom:

Propozicija 1.2.4. *Neka je F regularna. Tada je očekivani profit koji se maksimizira izborom funkcije q dan sa:*
(i) ako je $v'(0)(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}) \leq c$ *onda je*

$$q(\theta) = 0,$$

(ii) inače,

$$v'(q(\theta))(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}) = c.$$

Maksimizirani profit t je dan sa:

$$t(\theta) = \theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dx.$$

Primijetimo da za najveći tip $\theta = \overline{\theta}$ vrijedi: $1 - F(\theta) = 0$. Primijenimo $\overline{\theta}$ i $q(\overline{\theta})$ na (ii) te dobijemo: $v'(q(\overline{\theta}))\overline{\theta} = c$. Ova jednadžba pokazuje da najveći tip osigurava količinu, za koju je marginalna volja da plati, točno jednaka marginalnom trošku proizvodnje. Tu količinu bi ovaj tip želio proizvesti kad bi posjedovao tvrtku i zovemo je *prva najbolja količina.*

Zaključujemo primjerom:

Primjer 1.2.5. *Neka je* $c = 1$, $v(q) = \sqrt{q}$, θ *je uniformnno distribuirana na* $[0, 1]$ *tj.* $F(\theta) = \theta$ *i* $f(\theta) = 1$, *za svaki* $\theta \in [0, 1]$.
Provjerimo da je izraz $\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ *raste u* θ :

$$\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} = \theta - \frac{1 - \theta}{1} = 2\theta - 1.$$

Dakle, $2\theta - 1$ *je rastuća funkcija u* θ.

Promotrimo za koje je vrijednosti od θ *optimalna količina* $q(\theta)$ *jednaka nula:*

$$\begin{aligned} v'(0)(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}) \leq c &\Leftrightarrow (v'(0) = +\infty) \\ &\Leftrightarrow \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2\theta - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \theta \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ako je $\theta > \frac{1}{2}$, onda je optimalni $q(\theta)$ dan s:

$$\begin{aligned} v'(q(\theta))(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}) = c &\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{q}}(2\theta - 1) = 1 \\ &\Leftrightarrow 2\theta - 1 = 2\sqrt{q} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{q} = \theta - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow q = (\theta - \frac{1}{2})^2 \end{aligned}$$

Odgovarajući transfer $t(\theta)$ iznosi nula ako je $\theta \le \frac{1}{2}$.

Ako je $\theta > \frac{1}{2}$, onda je transfer dan s:

$$\begin{aligned} t(\theta) &= \theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dx \\ &= \theta\sqrt{(\theta - \frac{1}{2})^2} - \int_{\frac{1}{2}}^{\theta} \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2}dx \\ &= \theta(\theta - \frac{1}{2}) - [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x]_{\frac{1}{2}}^{\theta} \\ &= \theta(\theta - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Transfer t želimo prikazati kao funkciju od q. Promotrimo prvo koji tip θ kupuje danu količinu q :

$$\begin{aligned} q(\theta) = q &\Leftrightarrow (\theta - \frac{1}{2})^2 = q \\ &\Leftrightarrow \theta - \frac{1}{2} = \sqrt{q} \\ &\Leftrightarrow \theta = \sqrt{q} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Isplata za tip θ je:

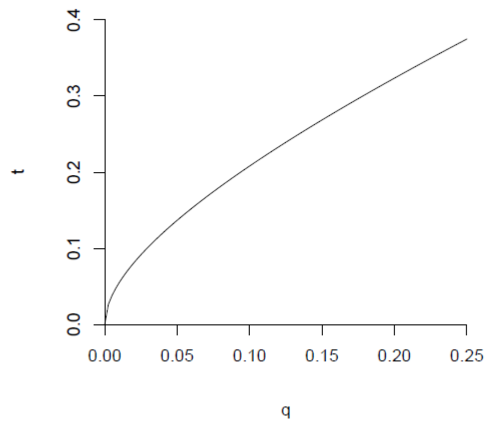
$$\begin{aligned} t(\theta) &= \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{q} + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q} \end{aligned}$$

Dakle, prodavač nudi kupcu količinu $q \in [0, \frac{1}{4}]$ *po cijeni* $t(\theta) = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q}$.

Uočimo da postoji popust na količinu.
Vidimo da cijena po jedinici:

$$\frac{t}{q} = \frac{\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q}}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{q}}$$

pada po q.
Ova optimalna ne-linearna cjenovna shema je prikazana na Slici 1.1.



Slika 1.1: Optimalna ne-linearna cjenovna shema

Poglavlje 2

Klasični Bayesov mehanizam

U ovom poglavlju opisati ćemo dva klasična problema dizajna mehanizma koristeći Bayes Nashovu ravnotežu za predviđanje strateškog ponašanja za bilo koji dani mehanizam.

2.1 Aukcije jednog dobra

Pretpostavimo da prodavač želi prodati jedno nerazdvojivo dobro i postoji $N \geqslant 2$ potencijalnih kupaca čiji skup označavamo s $I = \{1, 2, ..., N\}$.

Korisnost kupca i ako kupi proizvod i i plati prodavaču transfer t_i iznosi $\theta_i - t_i$, a ako ne kupi proizvod korisnost iznosi $0 - t_i$. Tada je prodavačeva korisnost kada dobije transfer t_i od kupca $i = \{1, ..., N\}$: $\sum_{i=1}^{N} t_i$.

Pretpostavimo da nitko (ni prodavač ni ostali kupci) osim kupca i ne zna vrijednost θ_i. Modeliramo vrijednost θ_i kao slučajnu varijablu s pripadnom funkcijom distribucije F_i i funkcijom gustoće f_i, $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, $0 \leq \underline{\theta} < \overline{\theta}$ za svaki i. Ovime ne pretpostavljamo da slučajne varijable θ_i imaju istu distribuciju za različiti i već pretpostavljamo da su θ_i definirane na istom skupu. Pretpostavimo i da je $f_i(\theta_i) > 0$ za svaki $i \in I$ i za svaki $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

Pretpostavimo da su za $i, j \in I$, $i \neq j$ slučajne varijable θ_i i θ_j nezavisne. Neka je $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N)$ slučajni vektor s distribucijom $F = F_1 \cdot F_2 \cdot ...F_N$ i pripadnom funkcijom gustoće f. Slučajne varijable θ definirane su na $\Theta \equiv [\underline{\theta}, \overline{\theta}]^N$. Distribucija F poznata je i prodavaču i svim kupcima.

Ovakav model, u kojem je θ_i nepoznat ostalim kupcima $j \neq i$ i prodavaču, u kojem je distribucija F poznata među kupcima i prodavačem i u kojem tuđe mišljenje ne mijenja procjenu vrijednosti kupca, naziva se *model nezavisnih privatnih informacija.* Svi primjeri u ovom poglavlju će biti temeljeni na ovoj pretpostavci.

Kažemo da su θ_i *privatne vrijednosti* tj. privatna informacija svakog kupca je dovoljna da kupac pridruži vrijednost dobru.

Mehanizmi, direktni mehanizmi i princip otkrivenja

Kao i ranije, promatramo moguće strategije prodavača da proda svoje dobro. Očita strategija je npr. da prodavač ponudi cijenu te unutar skupa kupaca koji su voljni platiti tu cijenu, izabere nasumično nekog kupca.

Promotrimo neke općenitije metode za prodaju dobra. Dopustiti ćemo prodavaču da bira ekstenzivnu formu igre u kojoj su igrači potencijalni kupci i prodavač. Ishodi su definirani kao vjerojatnosna distribucija na skupu $\{0, 1, 2, ...N\} \times \mathbb{R}^N$, gdje ishod nula znači da dobro ostaje kod prodavača tj. nije prodano niti jednom kupcu. Prodavača možemo eliminirati i promatrati igru u kojoj su igrači samo potencijalni kupci.

Zbog jednostavnosti, ovako definiranu igru u nastavku ćemo zvati mehanizmom. Mehanizam koji je u skladu s navedenim pretpostavkama o korisnosti, informacijama i distribuciji tipova definira igru s nepotpunim informacijama. Rješenje takve igre dobiva se traženjem Bayes Nashove ravnoteže. Znamo da igra može imati jednu, više ili nijednu Bayes Nashovu ravnotežu. Mi ćemo pretpostaviti da prodavač bira igru koja ima barem jednu Bayes Nashovu ravnotežu. Kada prodavač definira mehanizam, predlaže Bayes Nashovu ravnotežu u odgovarajućoj igri. Kupci će igrati ravnotežu koju prodavač nudi. Također, ako postoji više ravnoteža, prodavač će nasumično odabrati ravnotežu koju će igrači igrati.

Pretpostavimo da je korisnost kupca koji odustane od mehanizma jednaka nuli. Pretpostavimo da ravnoteža koju prodavač nudi mora potencijalnim kupcima osiguravati očekivanu korisnost barem nula.

Sada ćemo definirati direktni mehanizam i pokazati da bez smanjenja općenitosti možemo promatrati takve mehanizme. Definiramo skup Δ svih vjerojatnosnih distribucija na skupu kupaca I kojima se može prodati dobro:

$$\Delta := \{(q_1, q_2, ..., q_N) | 0 \leq q_i < 1, \forall i \in I, \sum_{i=1}^{N} q_i \leq 1\}.$$

Uočimo da vjerojatnosti $q_1, q_2, ..., q_N$ mogu biti manje od jedan pa je vjerojatnost da dobro neće biti prodano nikome jednaka $1 - \sum_{i=1}^{N} q_i$.

Definicija 2.1.1. *Direktni mehanizam sastoji se od funkcija q i t_i (za svaki $i \in I$) takvih da:*

$$q : \theta \to \Delta$$

i

$$t_i : \theta \to \mathbb{R}$$

za svaki $i \in I$.

U direktnom mehanizmu kupci istovremeno i neovisno jedan o drugom prijavljuju svoje tipove. Funkcija $q(\theta)$ opisuje pravilo po kojem će se dobro dodijeliti ako je prijavljen vektor tipova θ. Funkcija $q_i(\theta)$ predstavlja vjerojatnost da će kupac i dobiti proizvod ako je prijavljen vektor θ. Funkcija t_i predstavlja transfer koji kupac i plaća prodavaču. Bez smanjenja općenitosti smo pretpostavili da su isplate determinističke.

Kao i ranije, sada ćemo iznijeti princip otkrivenja kako bi sveli promatranje samo na direktne mehanizme.

Propozicija 2.1.2. ***(Princip otkivenja)*** *Za svaki mehanizam Γ i Bayes Nashovu ravnotežu σ u Γ postoji direktni mehanizam Γ' i Bayes Nashova ravnoteža σ' u Γ' tako da:*

(i) Za svaki i i svaki θ_i, vektor strategija σ' zadovoljava $\sigma'_i(\theta_i) = \theta_i$, tj. σ' osigurava govorenje istine

(ii) Za svaki vektor θ, distribucija po svim ishodima u Γ ako kupci igraju σ jednaka je distribuciji ishoda u Γ' ako kupci igraju σ'. Očekivana vrijednost isplate transfera u Γ ako kupci igraju σ je jednaka isplati transfera u Γ' ako kupci igraju σ'.

Dokaz. Neka je Γ' direktni mehanizam koji se sastoji od funkcija q i t_i definiranih kao u (ii). Pokazati ćemo da govorenje istine tj. igranje σ' daje Bayes Nashovu ravnotežu igre. Pretpostavimo suprotno. Ako agent i za svoj tip θ_i prijavi tip θ'_i tada tip θ_i daje devijaciju kod σ i igra strategiju σ čime se dobije θ'_i u Γ. Stoga, σ nije Bayes Nashova ravnoteža u Γ. □

Princip otkrivenja uvelike pojednostavljuje našu potragu za optimalnim mehanizmima. Sada možemo promatrati samo direktne mehanizme u kojima je Bayes Nashova ravnoteža takva da svi kupci prijavljuju istinite tipove i svaki tip ima očekivanu korisnost barem nula.

Uvodimo sljedeću notaciju. Neka je $\theta_{-i} = (\theta_1, ...\theta_{i-1}, \theta_{i+1}, ...\theta_N)$ vektor svih tipova osim tipa i-tog igrača definiran na skupu $\Theta_{-i} \equiv \Theta^{N-1}$. Neka je F_{-i} funkcija distribucije od θ_{-i} s pripadnom funkcijom gustoće f_{-i}.

Za dani direktni mehanizam definiramo za svakog kupca $i \in I$ funkciju $Q_i : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to [0, 1]$ tako da je

$$Q_i(\theta_i) = \int_{\theta_{-i}} q_i(\theta_i, \theta_{-i}) f(\theta_{-i}) d\theta_{-i}.$$

Dakle, $Q_i(\theta_i)^{-i}$ je očekivana vrijednost uvjetne vjerojatnosti da kupac i dobije dobro, uz uvjet da je kupac i prijavio θ_i.

Također, za svakog kupca $i \in I$ definiramo funkciju $T_i : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}$ tako da je

$$T_i(\theta_i) = \int_{\theta_{-i}} t_i(\theta_i, \theta_{-i}) f(\theta_{-i}) d\theta_{-i}.$$

Dakle, $T_i(\theta_i)$ je očekivana vrijednost uvjetnog transfera kojeg kupac i plaća prodavaču , uz uvjet da je kupac i prijavio θ_i.

Konačno, definiramo očekivanu korisnost $U_i(\theta_i)$ kupca i, uz uvjet da je kupac i prijavio θ_i tako da je

$$U_i(\theta_i) = \theta_i Q_i(\theta_i) - T_i(\theta_i).$$

Koristeći ovu notaciju sada možemo formalno definirati dva uvjeta koja prodavač mora poštovati kada bira mehanizam prodaje.

Definicija 2.1.3. *Direktni mehanizam je poticajno kompatibilan ako je govorenje istine daje Bayes Nashovu ravnotežu tj.* $\theta_i Q_i(\theta_i) - T_i(\theta_i) \geqslant \theta_i Q_i(\theta_i') - T_i(\theta_i')$, *za svaki* $i \in I$ *i* $\theta_i, \theta_i' \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

Definicija 2.1.4. *Direktni mehanizam je individualno racionalan ako je svaki kupac, uvjetovan svojim tipom, dobrovoljno spreman sudjelovati, tj.*$U_i(\theta_i) \geqslant 0$ *za svaki* $i \in I$ *i* $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

Kad je mehanizam definiran, igra prolazi kroz tri faze. Faza koja slijedi nakon što su kupci izabrali svoje tipove, ali prije nego što su ih prijavili, zove se *privremena (interim) faza.* Faza koja slijedi nakon što su kupci izabrali svoje tipove, ali prije nego što su ih prijavili, zove se *Ex ante faza,* a faza nakon prijave tipova *Ex post faza.*

Karakterizacija poticajne kompatibilnosti i individualne racionalnosti

U ovom podpoglavlju želimo bolje okarakterizirati skup svih direktnih mehanizama koji zadovoljavaju dva uvjeta u Definicijama (2.1.3) i (2.1.4). Postupamo analogno kao u prethodnom poglavlju pa ćemo dokaze izostaviti.

Lema 2.1.5. *Ako je direktni mehanizam poticajno kompatibilan onda je za svakog kupca* $i \in I$*, funkcija* $u(\theta)$ *rastuća.*

Lema 2.1.6. *Ako je direktni mehanizam poticajno kompatibilan, onda je za svakog kupca* $i \in I$ *funkcija* U_i *rastuća, konveksna, stoga diferencijabilna osim u prebrojivo mnogo točaka. Za svaki* θ_i *za koji je diferencijabilna vrijedi:*

$$U'(\theta_i) = Q_i(\theta_i).$$

Lema 2.1.7. ***(Ekvivalentnost isplata)*** *Neka je dan poticajno kompatibilan direktni mehanizam. Tada za svaki* $i \in I$ *i za svaki* $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ *vrijedi:*

$$U_i(\theta_i) = U_i(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x)dx.$$

Lema 2.1.8. ***(Ekvivalentnost prihoda)*** *Neka je dan poticajno kompatibilan direktni mehanizam. Tada za svaki $i \in I$ i za svaki $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ vrijedi:*

$$T_i(\theta_i) = T_i(\underline{\theta}) + (\theta_i Q_i(\theta_i) - \underline{\theta} Q_i(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x)dx.$$

Uočimo da različite funkcije t_i mogu dati iste očekivane isplate T_i. Promotrimo dva različita indirektna mehanizma i njihove Bayes Nashove ravnoteže tako da imaju istu očekivanu vjerojatnost dobivanja dobra za svaki tip svakog kupca i imaju iste očekivane isplate za najmanji tip u oba mehanizma. Tada su po Lemi 2.1.8 svi tipovi očekivanih isplata isti u ta dva indirektna mehanizma pa je stoga i očekivani prihod prodavača isti u oba mehanizma. Iz tog razloga Lemu 2.1.8 zovemo *lema o ekvivalentnosti prihoda.* Lema 2.1.8 nam govori da očekivane isplate za sve tipove ovise samo o očekivanom pravilu raspodjele i očekivanoj isplati za najniži tip.

Sada dajemo i dovoljne uvjete da bi direktni mehanizam bio potivajno kompatibilan:

Propozicija 2.1.9. *Direktni mehanizam $(g_1, t_1, t_2, ..., t_N)$ je poticajno kompatibilan ako i samo ako za svaki $i \in I$:*
(i) Q_i je rastuća;
(ii) Za svaki $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ vrijedi $T_i(\theta_i) = T_i(\underline{\theta}) + (\theta_i Q_i(\theta_i) - \underline{\theta}_i Q_i(\underline{\theta}_i)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x)dx$

Kupac sada ima dvije varijable izbora: pravilo raspodjele q i očekivana plaćanja za najniže tipove $T(\underline{\theta}_i)$. Dokle god prodavač bira q tako da su funkcije Q_i rastuće za svaki $i \in I$, on može izabrati očekivane isplate za najmanji tip i biti siguran da će postojati neka shema transfera za koju je pravilo raspodjele poticajno kompatibilno. Svaka takva shema transfera dati će prodavaču isti očekivani povrat.

Nakon što smo okarakterizirali poticajnu kompatibilnost sada se možemo fokusirati na individualnu racionalnost.

Propozicija 2.1.10. *Poticajno kompatibilan direktni mehanizam je individualno racionalan ako i samo ako za svaki $i \in I$ vrijedi*

$$T_i(\underline{\theta}_i) \leq \underline{\theta}_i Q_i(\underline{\theta}_i).$$

Dakle, prodavač mora izabrati mehanizam za kojeg je očekivana korisnost barem nula za najniže tipove.

Maksimizacija očekivanog prihoda

Lema 2.1.11. *Ako poticajno kompatibilan i individualno racionalan direktni mehanizam maksimizira prodavačev očekivani prihod onda za svaki $i \in I$ vrijedi:*

$$T_i(\underline{\theta}) = \underline{\theta} Q_i(\underline{\theta}).$$

Sada možemo još više pojednostaviti prodavačev problem. Prodavač mora izabrati funkciju q tako da su vjerojatnosti Q_i rastuće za svaki $i \in I$. Uvrštavanjem formule iz Leme 2.1.11 u Propoziciju 2.1.9(ii) dobivamo za svaki $i \in I$ i $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$:

$$T_i(\theta_i) = \theta_i Q_i(\theta_i) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x)dx.$$

Vidimo da na prodavačev očekivani povrat ne utječe funkcija q već samo vjerojatnosti Q_i. Sada tražimo optimalnu funkciju q.
Prodavačev očekivani povrat za bilo kojeg kupca i iznosi:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} Q_i(\theta_i)(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)})f_i(\theta_i)d\theta_i. \tag{2.1}$$

Da bi dobili formulu za ukupni očekivani transfer svih kupaca, moramo prosumirati (2.1) po svim $i \in I$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N}[\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} Q_i(\theta_i)(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i})f_i(\theta_i)d\theta_i] \\ = &\sum_{i=1}^{N}[\int_{\Theta} q_i(\theta_i)(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i})f(\theta)d\theta] \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdje je jednakost očita zbog definicije od $Q_i(\theta_i)$.

Kao i ranije, pitamo se koje funkcije q bi prodavač izabrao ako ne zna da su funkcije Q_i rastuće. Tada bi kupac za svaki θ birao vjerojatnosti $q_i(\theta)$ tako da maksimizira izraz u obloj zagradi u (2.2). Označimo taj izraz s:

$$\psi_i(\theta_i) := \theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)},$$

za svaki $i \in I$ i $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.
Tada je optimalno pravilo raspodjele funkcije q (bez uvjeta monotonosti):

$$q_i(\theta) = \begin{cases} 1, & ako je\ \psi_i(\theta_i) > 0\ i\ \psi_i(\theta_i) > \psi_j(\theta_j),\ \forall j \in I, j \neq i, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases},$$

za svaki $i \in I$ i $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

Sada uvodimo pretpostavku za funkcije $\psi_i(\theta_i)$. Pretpostavljamo da su za sve agente $i \in I$ funkcije distribucije F_i regularne. Dakle, za svaki $i \in I$ funkcije $\psi_i(\theta_i)$ su strogo rastuće. Ako ψ_i raste (pod pretpostavkom da su F_i regularne) onda su Q_i rastuće u θ_i. Dolazimo do sljedećeg rezultata:

Propozicija 2.1.12. *Neka su za svakog kupca $i \in I$ distribucije F_i regularne. Među svim poticajno kompatibilnim i individualno racionalnim direktnim mehanizmima, oni mehanizmi koji maksimiziraju prodavačev očekivani prihod za svaki $i \in I$ i za svaki $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ dani su s :*

(i) $q_i(\theta) = \begin{cases} 1, & ako\,je\ \psi_i(\theta_i) > 0\ i\ \psi_i(\theta_i) > \psi_{i'}(\theta_{i'})\ , \forall i' \in I,\ i' \neq i, \\ 0, & inače. \end{cases}$

(ii) $T_i(\theta_i) = \theta_i Q_i(\theta_i) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x)dx.$

Izraz $\psi_i(\theta_i)$ se još zove *virtualni tip*. Koristeći taj naziv, možemo ovako izreći rezultat gornje propozicije: U aukciji u kojoj se maksimizira očekivani povrat prodavača, dobro se dodjeljuje kupcu s najvećim virtualnim tipom ako je taj tip barem nula.

Maksimizacija blagostanja

Sada ćemo malo modelirati u korist kupca, tj. pretpostavimo da prodavač ne maksimizira očekivani profit već očekivano blagostanje. Pretpostavimo da prodavač koristi sljedeću definiciju korisnosti blagostanja:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i(\theta)\theta_i.$$

Vidimo da prodavača više ne zanima transfer pa očekivano blagostanje ovisi samo o pravilu raspodjele q. Kupac tada može izabrati bilo koje pravilo q za koje su funkcije Q_i strogo rastuće i može izabrati bilo koja plaćanja za koje je

$$T_i(\underline{\theta}_i) \leq \underline{\theta}_i Q_i(\underline{\theta}_i),$$

za svaki $i \in I$.

Ako dobro nije dodijeljeno nijednom kupcu, onda blagostanje iznosi nula pa zaključujemo da prodavač maksimizirajući blagostanje uvijek želi prodati dobro. Prodavač tada dodjeljuje dobro kupcu s najvećim tipom jer su funkcije Q_i rastuće.

Zaključujemo propozicijom:

Propozicija 2.1.13. *Među svim poticajno kompatibilnim i individualno racionalnim direktnim mehanizmima, mehanizam maksimizira blagostanje ako i samo ako za svaki $i \in I$ i za svaki $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$:*

(i) $q_i(\theta) = \begin{cases} 1, & ako\,je\ \theta_i > \theta_j,\ za\ svaki\,j \in I, j \neq i, \\ 0, & inače. \end{cases}$

(ii) $T_i(\theta_i) \leq \theta_i Q_i(\theta_i) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x)dx$

Primjer 2.1.14. ***(Simetrični slučaj)*** *Neka je $\underline{\theta} = 0$, $\overline{\theta} = 1$ i neka je θ_i uniformno distribuirana tako da je $F(\theta_i) = \theta_i$. Neka je $i = 1, 2$, tj. neka postoje dva kupca. Tada je:*

$$
\begin{aligned}
\psi_i(\theta_i) &= \theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_)} \\
&= \theta_i - \frac{a - \theta_i}{1} \\
&= 2\theta_i - 1.
\end{aligned}
$$

Vidimo da je ψ_i rastuća funkcija, tj. vrijedi pretpostavka o regularnosti.

U aukciji koja maksimizira očekivani prihod, dobro se neće prodati nijednom kupcu ako:

$$
\begin{aligned}
\psi_i(\theta_i) < 0 &\Leftrightarrow 2\theta_i - 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow \theta_i < \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

za i = 1 i i = 2.
Ako je dobro prodano, prodano je kupcu 1 ako:

$$
\begin{aligned}
\psi_1(\theta_1) > \psi_2(\theta_2) &\Leftrightarrow 2\theta_1 - 1 > 2\theta_2 - 1 \\
&\Leftrightarrow \theta_1 > \theta_2.
\end{aligned}
$$

Dakle, u aukciji koja maksimizira očekivani prihod dobro će se dodijeliti kupcu s najvišim tipom ako je taj tip veći od $\frac{1}{2}$.

Primjer 2.1.15. ***(Nesimetrični slučaj)*** *Neka je N=2, tj. neka postoje dva kupca. Neka je $\underline{\theta} = 0$, $\overline{\theta} = 1$ i neka je $F_1(\theta_1) = (\theta_1)^2$ i $F_2(\theta_2) = 2\theta_2 - (\theta_2)^2$. Tada je:*

$$
\begin{aligned}
\psi_1(\theta_1) &= \theta_1 - \frac{1 - F_1(\theta_1)}{f_1(\theta_1)} \\
&= \theta_1 - \frac{1 - (\theta_1)^2}{2(\theta_1)} \\
&= \frac{3}{2}\theta_1 - \frac{1}{2\theta_1}
\end{aligned}
$$

i

$$\begin{aligned}\psi_2(\theta_2) &= \theta_2 - \frac{1 - F_2(\theta_2)}{f_2(\theta_2)} \\ &= \theta_2 - \frac{1 - 2\theta_2 + (\theta_2)^2}{2 - 2\theta_2} \\ &= \frac{3}{2}\theta_2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vidimo da su $\psi_1(\theta_1)$ i $\psi_2(\theta_2)$ regularne.

U aukciji koja maksimizira očekivani prihod, dobro se neće prodati nijednom kupcu ako:

$$\begin{aligned}\psi_1(\theta_1) < 0 &\Leftrightarrow \frac{3}{2}\theta_1 - \frac{1}{2\theta_1} < 0 \\ &\Leftrightarrow \theta_1 < \sqrt{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

i

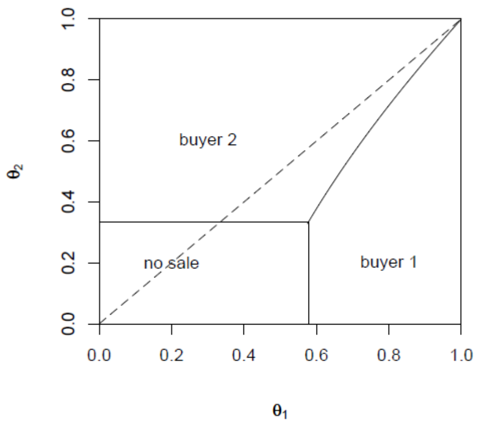
$$\begin{aligned}\psi_2(\theta_2) < 0 &\Leftrightarrow \frac{3}{2}\theta_2 - \frac{1}{2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \theta_2 < \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ako je dobro prodano, prodanu je kupcu 1 ako:

$$\begin{aligned}\psi_1(\theta_1) > \psi_2(\theta_2) &\Leftrightarrow \frac{3}{2}\theta_1 - \frac{1}{2\theta_1} > \frac{3}{2}\theta_2 - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \theta_2 < \theta_1 - \frac{1}{3\theta_1} + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Slika 2.1 *pokazuje optimalnu raspodjelu dobra.*

Vidimo da mehanizam ide u koristu kupca 2 jer ako je dobro prodano, kupac 1 će dobiti dobro jedino ako je njegova vrijednost veća od vrijednosti kupca 2. U mehanizmu maksimizacije očekivanog blagostanja, dobro će se dodijeliti kupcu 1 ako i samo ako je njegova vrijednost veća od vrijednosti kupca 2. Second price aukcija će maksimizirati očekivano blagostanje što first price aukcija nužno ne mora.



Slika 2.1: Raspodjela dobra maksimiziranjem očekivanog povrata

2.2 Javna dobra

Teorija igara ima za glavnu primjenu opskrbu javnim dobrima. Primjer koji ćemo promatrati u ovom dijelu prikazuje dizajn optimalnog mehanizma uz dodatna ograničenja osim pretpostavki o poticajnoj kompatibilnosti i individualnoj racionalnosti. Važno ograničenje na koje ćemo se ovdje koncentrirati je *vladino proračunsko ograničenje.*

Promotrimo zajednicu koja se sastoji od N agenata: $I = \{1, 2, ..., N\}$, $N \geqslant 2$ koji moraju donijeti zajedničku odluku o tome hoće li proizvesti neko nerazdvojivo, neisključivo javno dobro. Označimo tu odluku s $g \in \{0, 1\}$, gdje je $g = 1$ ako se javno dobro proizvodi i $g = 0$ ako se ne proizvodi. Ako je g zajednička odluka i ako kupac i plati zajednici transfer za proizvodnju t_i onda korisnost agenta i iznosi $\theta_i g - t_i$. θ_i predstavlja tip i-tog agenta tj. procjenu vrijednosti javnog dobra za i-tog agenta. θ_i je slučajna varijabla s funkcijom distribucije F_i i pripadnom gustoćom f_i. θ_i su definirane na $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ gdje je $0 \leq \underline{\theta} < \overline{\theta}$.

Pretpostavimo i da je $f_i(\theta_i) > 0$ za svaki $\theta_i \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

Pretpostavimo da su za svaki $i, j \in I$, $i \neq j$ slučajne varijable θ_i i θ_j nezavisne te pretpostavimo da svaki agent i zna samo θ_i, ali ne i procjene ostalih agenata θ_j gdje je $j \neq i$.

Neka je $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N)$ slučajni vektor definiran na skupu $\Theta \equiv [\underline{\theta}, \overline{\theta}]^N$ s funkcijom distribucije F i pripadnom funkcijom gustoće f. Distribucija F je poznata među svim agentima pa kažemo da promatramo *model nezavisnih privatnih vrijednosti javnog dobra.*

Neisključivost javnog dobra znači da g ulazi u korisnost svih kupaca, tj. svi sudjeluju u proizvodnji.

Neka je $c > 0$ trošak proizvodnje javnog dobra. Tada zajednička odluka dovodi do troška cg.

Promatrati ćemo zajednicu sa stajališta promatrača koji je dizajner mehanizma. Dizajner ne zna vrijednost θ, ali zna distribuciju F. Dizajneru mehanizma pridružujemo funkciju korisnosti blagostanja s jednakim težinama za sve agente.

Blagostanje je tada:

$$(\sum_{i=1}^{N} \theta_i) \cdot g - \sum_{i=1}^{N} t_i.$$

Poticajno kompatibilni i individuano racionalni direktni mehanizmi

Kao i ranije, bez smanjenja općenitosti možemo promatrati poticajno kompatibilne i individuano racionalne direktne mehanizme gdje isplate agenata nisu slučajne.

Definicija 2.2.1. *Direktni mehanizam se sastoji od funkcija q i t_i (za svaki $i \in I$) takvih da:*

$$q : \Theta \to [0, 1]$$

i

$$t_i : \Theta \to \mathbb{R}.$$

Funkcija q pridružuje svakom vektoru θ zajedničku odluku o proizvodnji dobra, ako su agenti prijavili vektor θ. q ćemo zvati *pravilo odluke.*

Za svakog agenta i funkcija t_i pridružuje svakom vektoru tipova θ transfer agenta i, ako su agenti prijavili vektor θ.

Za dani direktni mehanizam definiramo za svakog agenta $i \in I$ funkcije : $Q_i : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \{0, 1\}$ i $T_i : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}$, gdje je $Q_i(\theta_i)$ vjerojatnost da će se javno dobro proizvesti, ako je agent i prijavio θ_i, a $T_i(\theta_i)$ je očekivana vrijednost transfera kojeg agent i plaća zajednici, ako je agent i prijavio θ_i.

Konačno, za agenta i definiramo očekivanu korisnost $U_i(\theta_i)$ ako je agent i prijavio θ_i:

$$U_i(\theta_i) = Q_i(\theta_i)\theta_i - T_i(\theta_i).$$

Kao i ranije, promatrati ćemo poticajno kompatibilne i inidividualno racionalne mehanizme. Koristeći gornju notaciju za definicije vrijede Definicija 2.1.3 i Definicija 2.1.4, a za propozicije Propozicija 2.1.9 i Propozicija 2.1.10 za njihove karakterizacije o poticajnoj kompatibilnosti i individuanoj racionalnosti.

Ex ante i Ex budžetska ravnoteža

Sada uvodimo vladino proračunsko ograničenje. Ovo ograničenje zahtijeva da novac dobiven iz mehanizma bude dovoljan barem za pokrivanje troškova proizvodnje javnog dobra.

Definicija 2.2.2. *Direktni mehanizam je ex post budžetski uravnotežen ako za svaki* $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]^N$ *vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{N} t_i(\theta) \geqslant cq(\theta).$$

Definicija 2.2.3. *Direktni mehanizam je ex ante budžetski uravnotežen ako vrijedi:*

$$\int_{\Theta} \sum_{i=1}^{N} t_i(\theta) f(\theta) d\theta \geqslant \int_{\Theta} cq(\theta) f(\theta) d\theta.$$

Očito, ako je direktni mehanizam ex post budžetski uravnotežen onda je i ex ante budžetski uravnotežen. Pokazati ćemo da vrijedi i da za svaki ex ante budžetski uravnotežen mehanizam, postoji ekvivalentni ex post budžetski uravnotežen mehanizam.

Definirajmo prvo pojam ekvivalentnih mehanizama.

Definicija 2.2.4. *Dva direktna mehanizma su ekvivalentna ako su za sve agente* $i \in I$ *i za sve tipove* $\theta_i, \theta_i' \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ *očekivani transferi za agenta* i, *ako je njegov tip* θ_i *i za agenta* i' *ako je njegov tip* θ_i', *jednaki u oba mehanizma.*

Propozicija 2.2.5. *Za svaki direktni mehanizam s pravilom odluke* q *koji je ex ante budžetski uravnotežen, postoji ekvivalentni direktni mehanizam s istim pravilom odluke* q *koji je ex post budžetski uravnotežen.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da u ex ante budžetskoj uravnoteženosti vrijedi jednakost. Neka su transferi u ex ante budžetski uravnoteženom mehanizmu označeni s t_i i neka je $T_j(\theta_i)$ očekivana vrijednost transfera j-tog agenta uz uvjet da je agent i prijavio θ_i.

Konstruiramo sljedeće isplate agenta 1 u ex post mehanizmu ako je prijavljen vektor tipova θ :

$$t_1(\theta) + (cq(\theta) - \sum_{i=1}^{N} t_i(\theta)) - (cQ_1(\theta_1) - \sum_{i=1}^{N} T_i(\theta_1)).$$

Vidimo da smo originalnoj isplati agenta 1 dodali ex post deficit i oduzeli očekivanu vrijednost deficita uvjetovano signalom agenta 1.

Sada ćemo provjeriti da je očekivana isplata agenta 1, uz uvjet da je njegov stvarni tip θ_1 i njegov prijavljeni tip θ_1', nepromijenjena.

Izraz koji smo dodali transferu je zapravo slučajna varijabla s očekivanom vrijednošću nula, neovisno o tome je li agent 1 prijavio istinit ili lažni tip.

Nadalje, neka na primjer agent 2 plati očekivanu vrijednost deficita uvjetovanog tipom agenta 1.

Tada je njegova isplata:

$$t_2(\theta) + cQ_1(\theta_1) - \sum_{i=1}^{N} T_i(\theta_1).$$

Vidimo da je slučajna varijabla koju dodajemo isplati agenta 2 nezavisna s obzirom na njegov prijavljeni tip. Ona ima ex ante očekivanu vrijednost nula jer je mehanizam ex ante budžetski uravnotežen. Pošto signal agenta 2 ne daje nikakvu informaciju o signalu agenta 1, očekivanje je jednako kao u ex ante izrazu. Dakle, očekivana isplata agenta 2 je ista, neovisno o tome je li prijavio istinit ili lažan tip.

Konačno, svi agenti plaćaju jednako kao i ranije: $t_i(\theta)$.

Sumiranjem plaćanja svih agenata dobivamo da je suma svih plaćanja jednaka troškovima $cq(\theta)$ pa je stoga mehanizam budžetski uravnotežen.

Ako postoji ex ante budžetski višak tj. u definiciji ne vrijedi jednakost, onda od nekog agenta oduzmemo konstantu dok budžet ne postane uravnotežen. Tada provodimo gore opisane transformacije. Zatim ponovno dodajemo konstantu agentovim isplatama.

Dobiveni mehanizam ima tražena svojstva. □

Pretpostavimo da dizajner mehanizma promatra samo ex post budžetski uravnotežene mehanizme. Gornji rezultat nam govori da je ekvivalentno zahtijevati ex ante budžetski uravnotežene mehanizme. Stoga ćemo koristiti uvjet koji nam bude prikladniji.

Kada računamo ex ante očekivani povrat u poticajno kompatibilnom mehanizmu, na isti način kao i u prethodnom poglavlju dobijemo:

$$\sum_{i=1}^{N} -U_i(\underline{\theta}) + \int_{\Theta} q(\theta)[\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}) - c]f(\theta)d\theta. \tag{2.3}$$

Maksimizacija blagostanja

Sada se pitamo koji mehanizam $(q, t_1, t_2, ..., t_N)$ dizajner treba izabrati ako ne treba biti poticajno kompatibilan i individualno racionalan nego samo ex post budžetski uravnotežen. Kako dizajner mehanizma oduzima transfere u svojoj funkciji blagostanja (2.3), očito je da se transferi nikad neće podići iznad troška proizvodnje pa je tada optimalno pravilo odluke:

$$q^*(\theta) = \begin{cases} 1, & ako\,je\ \sum_{i=1}^{N} \theta_i \geqslant c, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Svako pravilo trasfera koje zadovoljava:

$$\sum_{i=1}^{N} t_i^*(\theta) = \begin{cases} c, & \textit{ako je } q(\theta) = 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

je optimalno.
Ovakav mehanizam zovemo *prvi najbolji mehanizam.*

Sljedeći rezultat pokazuje da u svim netrivijalnim slučajevima nijedan prvi najbolji mehanizam nije poticajno kompatibilan i individualno racionalan.

Propozicija 2.2.6. *Poticajno kompatibilan i individualno racionalan first best mehanizam postoji ako i samo ako $N\underline{\theta} \geq c$ i $N\overline{\theta} \leq c$. (tj. vrijede samo trivijalni slučajevi).*

Uvjet $N\underline{\theta} \geq c$ kaže da ako svi agenti prijave najniže vrijednosti, zbroj tih vrijednosti je barem toliki da pokrije troškove proizvodnje javnog dobra. Stoga, za svaki tip vektora, efikasno je proizvoditi dobro. Analogno, uvjet $N\overline{\theta} \leq c$ znači da za sve tipove vektora, nije efikasno proizvoditi dobro. Ovo su trivijalni slučajevi. Za sve netrivijalne slučajeve Propozicija 2.2.6 ne vrijedi.

Dokaz. Ako je $N\underline{\theta} \geq c$, javno dobro je uvijek proizvedeno i svi agenti plaćaju $\frac{c}{N}$, onda je mehanizam prvi najbolji te poticajno kompatibilan i individualno racionalan.

Ako je $N\overline{\theta} \leq c$, javno dobro se ne proizvodi i niti jedan agent ne plaća ništa, onda je mehanizam prvi najbolji te poticajno kompatibilan i individualno racionalan.

Ako je $N\underline{\theta} < c < N\overline{\theta}$, želimo pokazati da ne postoji poticajno kompatibilan i individualno racionalan prvi najbolji mehanizam.

Definirat ćemo direktni mehanizam za koji prvo najbolje pravilo odluke q^* daje poticajno kompatibilan i individualno racionalan mehanizam. Tada ćemo pokazati da takav mehanizam maksimizira očekivane isplate među svim poticajno kompatibilnim i individualno racionalnim prvim najboljim mehanizmima.Konačno, pokazati ćemo da to dovodi do očekivanog budžetskog deficita u netrivijalnom slučaju.

Definicija 2.2.7. *Pivotni je mehanizam je mehanizam koji je dan s prvi najboljim pravilnom odluke q^* i sljedećim transferima:*

$$t_i(\theta) = \underline{\theta} q^*(\underline{\theta}, \theta_{-i}) + (q^*(\theta) - q^*(\underline{\theta}, \theta_{-i}))(c - \sum_{j \neq i} \theta_j), \tag{2.4}$$

za svaki $i \in I$ i $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]^N$.

Da bi opravdali naziv *pivotni mehanizam*, korisno je zanemariti prvi izraz u (2.4). Taj izraz ne ovisi o prijavi θ_i kupca i. Drugi izraz je jednak promjeni društvenog blagostanja svih agenata uzrokovanih tipom agenta i pa stoga agent i plaća jedino ako je pivotni za zajedničku odluku. Ovdje uspoređujemo stvarni ishod s ishodom koji bi se dogodio da je agent i prijavio najmanji tip $\underline{\theta}$. Prijava agenta i mijenja zajedničku odluku ako je $q^*(\theta) - q^*(\underline{\theta}, \theta_{-i}) = 1$. U tom slučaju agent i plaća razliku između troškova proizvodnje i zbroja vrijednosti svih ostalih agenata.

Lema 2.2.8. *Pivotni mehanizam je poticajno kompatibilan i individualno racionalan.*

Dokaz. Promatramo agenta $i \in I$ sa stvarnim tipom θ_i i prijavljenim tipom $\theta_i' \neq \theta_i$.

Fiksiramo ostale agente kao θ_{-i}. Pokazati ćemo da je govorenje istine optimalno bez obzira na tipove ostalih agenata θ_{-i}. Stoga će slijediti da je govorenje istine Bayes Nashova ravnoteža. Ako izostavimo izraze koji ne ovise o prijavi i-tog agenta, onda je korisnost i-tog agenta ako je prijavio θ_i':

$$\begin{aligned} &\theta_i q^*(\theta_i', \theta_{-i}) - q^*(\theta_i', \theta_{-i})(c - \sum_{j \neq i} \theta_j) \\ &= q^*(\theta_i', \theta_{-i})(\sum_{j=1}^{N} \theta_j - c) \end{aligned}$$

Stoga, korisnost i-tog agenta je stvarno društveno blagostanje ako je zajednička odluka $q^*(\theta_i', \theta_{-i})$. Time smo dokazali poticajnu kompatibilnost.

Uočimo da je očekivana korisnost i-tog agenta očito jednaka nuli ako je njegov tip $\underline{\theta}$. Slijedi da je za sve tipove očekivana korisnost barem nula i mehanizam je individualno racionalan. □

Lema 2.2.9. *Nijedan poticajno kompatibilan i individualno racionalan mehanizam s prvim najboljim pravilom odluke q^* nema veći očekivani višak od pivotnog mehanizma.*

Pokažimo još da prvotni mehanizam ima ex ante očekivani deficit, osim u trivijalnom slučaju.

Lema 2.2.10. *Ako je $N\underline{\theta} < c < N\overline{\theta}$. Onda je ex ante očekivani višak prvotnog mehanizma, negativan.*

Dokaz. Pokazati ćemo da je ex-post višak prvotnog mehanizma uvijek nepozitivan i sa pozitivnom vjerojatnošću negativan.

Neka je θ takav da je $q^*(\theta) = 0$. Tada nema troškova i ni jedan agent ne plaća transfer. Stoga je deficit nula.

Neka je sada θ takav da je $q^*(\theta) = 1$ i $q^*(\underline{\theta}, \theta_{-i}) = 1$ za svaki $i \in I$. U tom slučaju svaki agent plaća $\underline{\theta}$. Po pretpostavci je vjerojatnost proizvodnje dobra,uz prvo najbolje pravilo odluke, sigurno manja od 1 pa je stoga $N\underline{\theta} < c$. Dakle, ukupna plaćanja su manja od c pa postoji deficit.

Konačno, neka je θ takav da vrijedi $q^*(\theta) = 1$ i $q^*(\underline{\theta}, \theta_{-i}) = 0$ za neki $i \in I$. Neka je P skup svih $i \in I$ za koje vrijedi taj uvjet. Takve agente nazivamo *pivotnima*.

Definiramo $NP = I \backslash P$, gdje je P broj elemenata skupa P, a NP broj elemenata skupa NP.

Ukupni transfer tada iznosi:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in P}(c - \sum_{j \neq i} \theta_j) + \sum_{i \in NP} \underline{\theta} \\
=&Pc - P \sum_{j \in NP} \theta_j - (P-1) \sum_{j \in P} \theta_j + \sum_{i \in NP} \underline{\theta} \\
=&Pc - (P-1) \sum_{j \in NP} \theta_j - (P-1) \sum_{j \in P} \theta_j - \sum_{i \in NP} (\theta_i - \underline{\theta}) \\
=&Pc - (P-1) \sum_{j \in I} \theta_j - \sum_{i \in NP} (\theta_i - \underline{\theta}) \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Pokažimo da dobiveni izraz nije veći od c:

$$\begin{aligned}
&Pc - (P-1) \sum_{j \in I} \theta_j - \sum_{i \in NP} (\theta_i - \underline{\theta}) \leq c \\
\Leftrightarrow&(P-1)c \leq (P-1) \sum_{j \in I} \theta_j + \sum_{i \in NP} (\theta_i - \underline{\theta}) \\
\Leftrightarrow&(P-1)c \leq (P-1) \sum_{j \in I} \theta_j \\
\Leftrightarrow&c \leq \sum_{j \in I} \theta_j, \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

što vrijedi za $q^*(\theta) = 1$.

Stanja u kojima se javno dobro proizvodi i neki su agenti pivotni, pojavljuju se s pozitivnom vjerojatnošću pod ovom pretpostavkom. Uvjetovano pojavljivanjem takvog stanja, uz vjerojatnost jedan, slijedi da je $\theta_i > \underline{\theta}$, za svaki $i \in NP$. U tom slučaju gornji račun pokazuje da je višak strogo negativan pa stoga postoji očekivani deficit.

□

Time je zaključen dokaz Propozicije 2.2.6.

□

Preostaje promotriti slučaj u kojem je po Propoziciji 2.2.6. nemoguće implementirati q^* koristeći mehanizam koji je poticajno kompatibilan, individualno racionalan i ex ante budžetski uravnotežen. Želimo dobiti direktni mehanizam koji maksimizira očekivano blagostanje među svim poticajno kompatibilnim, individualno racionalnim i ex ante bužetski uravnoteženim mehanizmima. Takav mehanizam zvati ćemo *drugi najbolji mehanizam.*

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da dizajner mehanizma uravnotežuje budžet tj. ne ostavlja višak u budžetu. Ako višak postoji, dizajner ga može vratiti agentima. Dizajner mehanizma može postići ex post budžetsku ravnotežu ako je postigao ex ante budžetsku ravnotežu. Stoga, u slučaju da se javno dobro proizvedi, plaćanja će se dodati do c, a ako se ne proizvodi, dodati će se do nule.

Dizajnerova objektivna funkcija se sada može zapisati kao:

$$\int_\Theta q(\theta)(\sum_{i\in I}\theta_i - c)f(\theta)d\theta$$

Sada se nameće da biramo q i $T_i(\underline{\theta})$ kao dizajnerove varijable izbora. Međutim, ekivalentno je za varijable izbora izabrati q i $U_i(\underline{\theta})$.
Ove varijable moraju zadovoljavati sljedeće uvjete:

(i) za svaki $i \in I$, funkcije Q_i su rastuće *(ograničenje poticajne kompatibilnosti)*; (2.7)

ﬄ(ii) za svaki $i \in I$, $U_i(\underline{\theta}) \geq 0$ *(ograničenje individualne racionalnosti)*; (2.8)

(iii) $$-\sum_{i=1}^{N} U_i(\underline{\theta}) + \int_\Theta q(\theta)[\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}) - c]f(\theta)d\theta = 0 \text{ (budžetsko ograničenje.)} \tag{2.9}$$

Možemo eliminirati varijable $U_i(\underline{\theta})$ iz problema, pa je tada budžetsko ograničenje dano s :

$$\int_\Theta q(\theta)[\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}) - c]f(\theta)d\theta \geq 0$$

Ako je lijeva strana strogo pozitivna, biramo plaćanja $T_i(\underline{\theta})$ tako da se zadovolji točna budžetska ravnoteža.

Dizajnerov problem rješavamo tako što ćemo riješiti oslabljeni problem gdje zanemarujemo ograničenje monotonosti (2.7). Zatim ćemo raspraviti uvjete pod kojima rješenje ovog oslabljenog problema zapravo mora zadovoljavati uvjet (2.7). Pod tim uvjetima će rješenje oslabljenog problema biti i rješenje početnog problema.

Da bi riješili oslabljeni problem, primijenimo Kuch-Tuckerov teorem za konačno dimenzionalne vektorske prostore na prostor funkcija.

Tada q rješava maksimizacijski oslabljeni problem ako i samo ako postoji Lagrangeov multiplikator $\lambda \geq 0$ tako da q maksimizira

$$\int_{\Theta} q(\theta)(\sum_{i\in I} \theta_i - c)f(\theta)d\theta + \lambda \int_{\Theta} q(\theta)[\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}) - c]f(\theta)d\theta \tag{2.10}$$

Nadalje, $\lambda = 0$ samo ako

$$\int_{\Theta} q(\theta)[\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}) - c]f(\theta)d\theta > 0. \tag{2.11}$$

Skup funkcija q je konveksan i objektivna funkcija koja maksimizira je linearna te stoga konkavna pa Lagrangeovu funkciju možemo pisati kao

$$\int_{\Theta} q(\theta)(1+\lambda)[\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}) - c]f(\theta)d\theta \tag{2.12}$$

Očito je Lagrangeova funkcija maksimizirana ako stavimo $q(\theta) = 1$ kad god je izraz u uglatim zagradama pozitivan.

Sada imamo sljedeće pravilo odluke:

$$q^*(\theta) = \begin{cases} 1, & ako\, je \sum_{i=1}^{N} \theta_i > c + \sum_{i=1}^{N}(\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.13}$$

Uočimo da mora vrijediti $\lambda > 0$ ako vrijedi Propozicija 2.2.6 jer za $\lambda = 0$ pravilo odluke (2.13) postaje prvo najbolje pravilo.
Sada uvodimo pretpostavku pod kojom pravilo odluke (2.13) za svaki $\lambda > 0$ zadovoljava uvjet monotonosti (2.7). Pretpostavljamo da je za svaki $i \in I$ funkcija distribucije F_i regularna, tj. funkcija $\psi_i(\theta_i) = \theta_i - \frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}$ je strogo rastuća.

Ako je F_i regularna onda $\theta_i - \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}$ strogo raste za svaki $\lambda \geq 0$. pa drugo najbolje pravilo (2.13) zadovoljava uvjet monotonosti (2.7).

Napokon, možemo zaključiti:

Propozicija 2.2.11. *Neka je $N\underline{\theta} < c < N\overline{\theta}$ i neka svaki agent $i \in I$ ima funkcije F_i regularne. Tada je direktni mehanizam $(g_1, t_1, t_2, ..., t_N)$ potecijalno kompatibilan, individualno racionalan, ex ante budžetski uravnotežen i maksimizira očekivano blagostanje među svim takvim mehanizmima ako i samo ako:*

(i) postoji $\lambda > 0$ takav da za svaki $\theta \in \Theta$:

$$q(\theta) = \begin{cases} 1, & ako\, je \sum_{i=1}^{N} \theta_i > c + \sum_{i=1}^{N}(\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}), \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

(ii)

$$\int_{\Theta} q(\theta)[\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}) - c]f(\theta)d\theta = 0$$

(iii) za svaki $i \in I$,

$$T_i(\theta_i) = \theta_i Q_i(\theta_i) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} Q_i(x)dx$$

Vidimo da se dobro provodi samo ako je suma vrijednost veća od donje granice koja je strogo veća od c.

Maksimizacija profita

Sada želimo naći mehanizam koji maksimizira očekivani profit među svim poticajno kompatibilnim, individualno racionalnim direktnim mehanizmima.

Dizajner mehanizma za maksimiziranje profita ima dvije varijable izbora: pravilo raspodjele q i plaćanja za najniže tipove, $T_i(\underline{\theta}_i)$. Ne pretpostavljamo da je najniži tip nužno nula.
Maksimizacija profita zahtjeva da vrijedi:

$$T_i(\underline{\theta}_i) = \underline{\theta}_i Q_i(\underline{\theta}_i)$$

Stoga je dovoljno izabrati samo q.
Tada očekivani profit iznosi:

$$\int_{\Theta} q(\theta)[\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}) - c]f(\theta)d\theta$$

Dizajner mehanizma mora poštovati uvjet da za svaki $i \in I$, funkcije Q_i moraju biti rastuće.

Propozicija 2.2.12. *Neka je funkcija distribucije F_i regularna za svakog agenta $i \in I$. Tada je direktni mehanizam $(g_1, t_1, t_2, ..., t_N)$ poticajno kompatibilan i individualno racionalan te maksimizira očekivani profit među svim takvim mehanizmima ako i samo ako za svaki $i \in I$ i za svaki $\theta \in \Theta$:*

(i) $q(\theta) = \begin{cases} 1, & ako\, je \sum_{i=1}^{N} \theta_i > c + \sum_{i=1}^{N} \frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}), \\ 0, & inače. \end{cases}$

(ii) $T_i(\theta_i) = \theta_i Q_i(\theta_i) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} Q_i(x)dx$

Sada donosimo primjer iz kojeg će slijediti propozicija.

Primjer 2.2.13. *Neka je N=2. Neka su θ_i uniformno distribuirane na $[0, 1]$ za $i = 1, 2$ i neka je $0 < c < 2$. Primijetimo da je distribucija regularna ($F_i(\theta_i) = \theta_i, f_i(\theta_i) = 1$) pa je zadovoljena pretpostavka o regularnosti.*

Promatramo prvo mehanizam maksimizacije očekivanog blagostanja. Po Propoziciji 2.2.6. za $\underline{\theta} = 0, \overline{\theta} = 1$ je $N\underline{\theta} < c < N\overline{\theta}$ pa ne postoji prvi najbolji mehanizam. Vjerojatnost s kojom prvo najbolje pravilo daje proizvodnju je strogo između 0 i 1.
Po propoziciji 2.2.11. poticajno kompatibilan, individualno racionalan i ex ante budžetski uravnotežen direktni mehanizam maksimizira očekivano blagostanje među svim takvim mehanizmima ako postoji neki $\lambda > 0$ takav da je $q(\theta) = 1$ ako i samo ako:

$$\begin{aligned}
&\theta_1 + \theta_2 > c + \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\frac{1-\theta_1}{1} + \frac{1-\theta_2}{1}\right) \\
\Leftrightarrow &\theta_1 + \theta_2 > c + \frac{2\lambda}{1+\lambda} - \frac{\lambda\theta_1}{1+\lambda} - \frac{\lambda\theta_2}{1+\lambda} \\
\Leftrightarrow &(\theta_1 + \theta_2)\frac{1+2\lambda}{1+\lambda} > c + \frac{2\lambda}{1+\lambda} \\
\Leftrightarrow &\theta_1 + \theta_2 > \frac{1+\lambda}{1+2\lambda}c + \frac{\lambda}{1+2\lambda}2
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Označimo desnu stranu od (2.1) sa s. Propozicija 3.8. nam stoga govori da potragu za drugim najboljim mehanizmom možemo suziti na one mehanizme za koje je $q(\theta) = 1$ ako i samo ako je $\theta_1 + \theta_2 \geq s$, za neki $s \in \langle c, 2\rangle$.
Dobiti ćemo s ako pretpostavimo da su očekivane isplate za najmanji tip jednake nula, da očekivane isplate za sve tipove zahtijevaju poticajnu kompatibilnost i da je budžetski višak u desnom dijelu jednadžbe (3.29) jednak nula.

Računati ćemo ukupne očekivane troškove od proizvodnje dobra, $C(s)$ i ukupni prihod mehanizma, $R(s)$. Promatrati ćemo dva slučaja:

1. slučaj: Neka je $s \leq 1$. Tada su očekivani troškovi od proizvodnje dobra:

$$C(s) = (1 - \frac{1}{2}s^2)c.$$

Računamo očekivanu isplatu agenta 1:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 q(\theta)(\theta_1) - \frac{1 - F_1(\theta_1)}{f_1(\theta_1)} f(\theta) d\theta &= \int_0^1 \int_0^1 (2\theta_1 - 1) d\theta_2 d\theta_1 \\
&= \int_0^s \int_{s-\theta_1}^1 (2\theta_1 - 1) d\theta_2 d\theta_1 + \int_s^1 \int_0^1 (2\theta_1 - 1) d\theta_2 d\theta_1 \\
&= -\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}s^2
\end{aligned}$$

Očekivana isplata agenta 2 će biti jednaka.

Dakle, ukupni očekivani prihod od mehanizma je:

$$R(s) = -\frac{2}{3}s^3 + s^2$$

2.slučaj: Neka je $s > 1$. *Tada su očekivani troškovi od proizvodnje dobra:*

$$C(s) = \frac{1}{2}(2-s)^2 c.$$

Računamo očekivanu isplatu agenta 1:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 q(\theta)(\theta_1) - \frac{1-F_1(\theta_1)}{f_1(\theta_1)} f(\theta)d\theta &= \int_{s-1}^1\int_{s-\theta_1}^1 (2\theta_1 - 1)d\theta_2 d\theta_1 \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(s-1)^2 + \frac{1}{3}(s-1)^3.\end{aligned}$$

Očekivana isplata agenta 2 će biti jednaka.

Dakle, ukupni očekivani prihod od mehanizma je:

$$R(s) = \frac{1}{3}(s-1)^2 + \frac{2}{3}(s-1)^3$$

Definiramo funkciju $D(s) := R(s) - C(s)$ *pa uvjet za s postaje* $D(s) = 0$.

Promotrimo derivacije od s :

$$0 < s < 1 \Rightarrow D'(s) = -2s^2 + (2+c)s = s(2(1-s)+c) > 0;$$
$$1 < s < 2 \Rightarrow D'(s) = -2(s-1) + 2(s-1)^2 + (2-s)c = (2-s)(c-2(s-1)).$$

Izraz u posljednjem retku je pozitivan ako i samo ako :

$$c - 2(s-1) > 0 \Leftrightarrow s < 1 + \frac{c}{2}$$

Promotrimo još predznak od $D(s)$ *za neke važne vrijednosti od s. Uočimo:*

$$D(0) = -c \text{ } i \text{ } D(2) = 0.$$

Nadalje, za $s = 1 + \frac{c}{2}$ *dobivamo:*

$$\begin{aligned}D(1+\frac{c}{2}) &= \frac{1}{3} - (\frac{c}{2})^2 + \frac{2}{3}(\frac{c}{2})^3 - \frac{1}{2}(1-\frac{c}{2})^2 c \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}c + (\frac{c}{2})^2 - \frac{1}{3}(\frac{c}{2})^2\end{aligned}$$

Želimo pokazati da je izraz u zadnjem retku strogo pozitivan.
Kada $c \to 0$*, izraz očito teži ka pozitivnoj vrijednosti.*
Kada $c \to 2$*, izraz teži prema nula.*

Stoga, dovoljno je pokazati da je derivacija tog izraza negativna za $0 < c < 2$.

Deriviracija izraza je:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} + \frac{c}{2} - \frac{1}{2}(\frac{c}{2})^2 &= \frac{c}{2}(1 - \frac{c}{2}) - \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dakle, $D(1 + \frac{1}{2}c) > 0$*. Zaključujemo da jednadžba* $D(s) = 0$ *ima točno dva rješenja: jedno na intervalu* $\langle 0, 1 + \frac{c}{2} \rangle$ *i rješenje* $s = 2$*.*

Provjerimo je li rješenje od $D(s) = 0$ *veće ili manje od 1 tako što ćemo promotriti vrijednost od* $D(1)$:

$$D(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}c > 0 \Leftrightarrow c < \frac{2}{3}$$

Dakle, rješenje jednadžbe $D(s) = 0$ *će biti između 0 i 1 ako i samo ako je* $< \frac{2}{3}$*. Inače će biti između 1 i* $1 + \frac{c}{2}$*. Ako je* $c < \frac{2}{3}$*, dobivamo s rješavanjem jednadžbe:*

$$-\frac{2}{3}s^3 + s^2 - (1 - \frac{1}{2}s^2)c = 0$$

Međutim, ova jednadžba nema jednostavna rješenja.

Ako je $c > \frac{2}{3}$*, dobivamo s rješavanjem jednadžbe:*

$$\frac{1}{3} - (s-1)^2 + \frac{2}{3}(s-1)^3 - \frac{1}{2}(2-s)^2 c = 0$$

Rješenje ove jednadžbe je:

$$s = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}.$$

Zaključujemo propozicijom:

Propozicija 2.2.14. *Dizajner utilitarnog mehanizma će izabrati mehanizam s pravilom odluke q takav da* $T_i(\theta_i) = \theta_i Q_i(\theta_i) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} Q_i(x)dx$ *gdje:*

(i) ako je $c < \frac{2}{3}$*, onda je s jedinstveno rješenje na* $[0, 1]$ *jednadžbe:*

$$-\frac{2}{3}s^3 + s^2 - (1 - \frac{1}{2}s^2)c = 0.$$

(ii)ako je $c \geq \frac{2}{3}$, *onda*

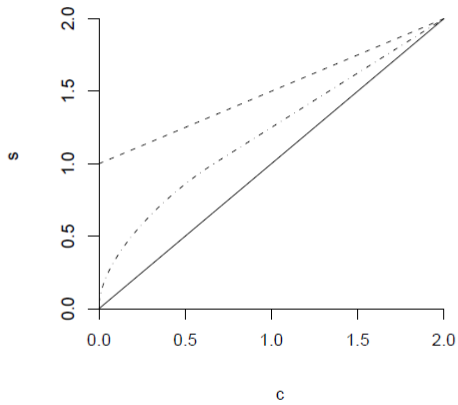
$$s = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}c.$$

Očekivani profit slijedi direktno iz propozicije:

Propozicija 2.2.15. *Dizajner mehanizma maksimizira očekivani profit ako izabrane mehanizam s pravilom raspodjele q takav da*

$$q(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \theta_1 + \theta_2 > s; \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

gdje je $s = 1 + \frac{1}{2}c$



Slika 2.2: Pragovi za proizvodnju u prvom najboljem, drugom najboljem i u mehanizmu maksimizacije profita

Slika 2.2 prikazuje optimalne pragove za proizvodnju u utilitarnom slučaju (iscrtana i istočkana linija) i u slučaju maksimizacije profita (iscrtana linija) kao funkciju od c. Puna linija je prvi najbolji prag. Vidimo da maskimizacija profita traži veću sumu tipova za početak proizvodnje u odnosu na blagostanje. Maksimiziranjem profita u obzir dolaze samo transferi, ali ne i socijalno stanje zajednice, tj. njihovi tipovi.

Bibliografija

[1] Tilman Borges, *An Introduction to the Theory of Mechanism Design*, 2008., (http://www.econ.yale.edu/~dirkb/teach/521b-08-09/reading/2008-mechanismdesign.pdf)

[2] Y. Narahari, *Game Theory and Mechanism Design*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2014.

[3] Halsey Lawrence Royden, *Real Analysis*, Prentice Hall, 3rd edition, 1988.

Sažetak

Ovaj diplomski rad je obradio temu dizajna mehanizma koja je temeljena na teoriji igara, podijeljenu obzirom na broj igrača.

Za početak, obrađujemo mehanizme između jednog prodavača i jednog kupca. Prvo se bavimo davanjem cijene nerazdvojivom dobru gdje je prodavač dizajner mehanizma. Intuitivnim pristupom procjenjujemo da je prodavaču najbolje da na temelju procjene kupčevog tipa, koja je dana funkcijom distibucije, postavi cijenu te maksimizira očekivani profit. Zanima nas postoji li bolji mehanizam. Uvodimo pojam direktnog mehanizma te ograničenja poticajne kompatibilnosti i individualne racionalnosti koje su nužne za lakšu analizu problema. Olakotna okolnost je što se ispostavilo (za sva poglavlja) da za svaki indirektni mehanizam gdje kupac ne mora prijavljivati istinit tip, postoji odgovarajući direktni mehanizam (princip otkrivenja). Nadalje, karakteriziramo svojstva takvih mehanizama koja su potrebna u potrazi za optimizirajućim mehanizmom. Na kraju se ispostavilo da je početna intuitivna strategija bila najbolji izbor pošto je prodavačeva objektivna funkcija linearna jer nema rizika.

Nakon toga prelazimo na nelinearno davanje cijena, tj. davanje cijene razdvojivom dobru, primjerice šećeru. Problem je malo kompleksniji te rezultat nije toliko trivijalan jer korisnost kupca više nije linearna zbog dodatno definirane funkcije v koja nam omogućuje manipuliranje. Na temelju pretpostavke da je distribucija slučajne varijable prijavljenog tipa regularna, dobijemo efektivan način za zadavanje mehanizima koji maksimizira profit. Na kraju poglavlja obrađujemo primjer u kojem vidimo da nam je uvedena funkcija v dala popust na količinu.

Drugo poglavlje obrađuje Bayesove mehanizme gdje u igri tražimo Bayes-Nash ravnotežu između igrača. Poglavlje počinje promatranjem aukcije jednog nerazdvojivog dobra gdje kupac daje na aukciju dobro za $N \geq 2$ agenata. Definiramo analogone već spomenute funkcije distribucije, direktnog mehanizma, principa otkrivenja, samo sada u slučaju problema više varijabli. Stoga, primorani smo definirati dodatne funkcije vjerojatnosti prodaje, očekivanog transfera i korisnosti koje ovise samo o prijavljenom tipu jednog agenta. Većina posljedica karakterizacije svojstava je analogna. Sličnom analizom kao u prethodnom poglavlju, dobijemo da dobro prodajemo kupcu s najvećom pozitivnom vrijednošću funkcije ψ, inače ne prodajemo. Na kraju obrađujemo primjer koji pokazuje kako se intu-

itivno raspoređuje vjerojatnost prodaje dobra kupcima.

Zadnja tema kojom se bavimo su javna dobra. Imamo zajednicu od $N \geq 2$ ljudi koji moraju odlučiti hoće li proizvoditi neko nerazdvojivo dobro. Odluka se donosi na temelju troška proizvodnje i iznosa transfera koji plaćaju agenti. Uz već dobro znane pojmove, definiramo i svojstvo ex ante i ex post budžetske ravnoteže, koje u suštini govore da ukupni transfer mora biti veći od troška prizvodnje. Prije svega zaključujemo da su to zapravo dva ekvivalentna pojma, stoga možemo birati koje ćemo koristiti. Prvo maksimiziramo blagostanje zajednice. Intuicija nas navodi na tzv. prvi najbolji mehanizam koji kaže da će se dobro proizvoditi ako je ukupna suma tipova veća od cijene proizvodnje. Nažalost se ispostavi da se poticajno kompatibilan individualno racionalan mehanizam može konstruirati samo u trivijalnim slučajevima. Koristeći Kuch-Tucherov teorem dobijemo drugi najbolji mehanizam za netrivijalne slučajeve. Sličnom analizom dobijemo i optimizirajući mehanizam za maksimizaciju profita.

Summary

This thesis processed mechanism design topic which is based on game theory, divided due to the number of players. At the beginning we analyze mechanisms between a seller and a buyer. First we deal with giving prices to single indivisible good where the seller is a mechanism designer. With intuitive approach we estimate that the best for the seller to do is based on assessments of the buyer's type, which is given by distribution function, to set the price and maximizes expected profit. We are interested in whether there is better mechanism. We introduce the concept of direct mechanism and incentive compatibility and individual rationality constraints that are necessary for easier analysis of the problem. Mitigating circumstance is that it turned out (for all chapters) that for any indirect mechanism where the buyer does not have to report true type, there is appropriate direct mechanism (revelation principle). Further more, we bring characterizations of mechanisms that were necessary in pursuit of optimizing mechanism. At the end it turned out that the beginning strategy was the best choice because the seller's objective function is linear because there is no risk. After that, we have moved to nonlinear pricing i.e., pricing divisible good, for example sugar. The outcome of this complex problem isn't so trivial because buyer's utility is no longer linear because of further defined function v which enables us to manipulate. Based on assumptions that distribution of random variable for reported type is regular, we have got effective way for setting mechanism that maximizes profit. At the end of the chapter we have processed an example that shows that the introduced function v gave as a discount on the amount. The second chapter process Bayesian mechanism where in the game we look for Bayes-Nash equilibrium between players. Chapter starts with observing an auction of one indivisible good where the buyer gives his good on a auction for $N > 2$ agents. Then we define analogues of already mentioned distribution function, direct mechanism, revelation principle, only now in a case with multiple variables. Thus, we have to define additional probability function of the sale, expected transfer and utility that depends only on reported type of one agent. Most of the consequences of the characterization of properties is analog. With a similar analysis as in the previous chapter, we get that we will sell the good to the buyer with the largest positive value of the function "psi", otherwise we won't sell. At the end we have an example that shows how to distribute the likelihood of the sale of goods to customers The last topic that we are dealing with are

public goods. We have a community $N \geq 2$ of people who have to decide whether they will produce some indivisible good. Decision is made on the basis of cost of production and the amount of transfers that agents pay. We also define the property ex ante and ex post of budget balance, which essentially says that overall transfers must be greater than the cost of production. We conclude that these are two equivalent concepts, therefore we can choose whichever we want to use. First we maximize welfare of the community. Intuition leads us to first best mechanism which tells us that the good will be produce if the total sum of the types is greater than the cost of production. Unfortunately, it turns out that incentive compatible, individually rational mechanism can be built only in trivial cases. Using Kuch-Tucherov theorem we get second best mechanism for non-trivial cases. With a similar analysis we get optimizing mechanism for profit maximization. By observing the example we can see that profit maximization requires bigger types of agents from that one that maximizes the welfare.

Životopis

Ja, Melita Vidov, rođena sam 15.02.1991. godine u Zadru gdje sam odrasla i danas živim. Školovanje sam započela 1997. godine u Osnovnoj školi Petra Preradovića u Zadru te nastavila 2005. godine upisom u prirodoslovno-matematički smjer u Gimnaziji Jurja Barakovića.

Potom sam upisala Prirodoslovno-matematički fakultet, matematički odjel te 2013.godine stekla titulu sveučilišne prvostupnice edukacijske matematike (univ. bacc. edu. math) nakon čega sam nastavila diplomski studij Financijske i Poslovne matematike.

Tijekom studiranja radila sam raznovrsne studentske poslove od kojih mogu istaknuti rad u Nacionalnom centru za vanjsko vrednovanje obrazovanja 2015. godine, gdje sam bila stručni suradnik, ispravljač ispita iz matematike i prirodoslovlja na međunarodnom projektu TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study).

Od rujnu 2015. godine, radila sam kao profesorica Matematike i Primjenjene matematike u Stukovnoj školi Vice Vlatkovića u Zadru dok sam trenutno zaposlena u Pomorskoj školi u Zadru.